R. M. Martin

Verdad y denotación

EF
ESTRUCTURA Y FUNCION
EDITORIAL TECNOS, S. A. - MADRID

Verdad y denotación

ESTRUCTURA Y FUNCION

EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

COLECCION DIRIGIDA POR

ENRIQUE TIERNO GALVAN

Núm. 1. *Quentin Gibson.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION SOCIAL
» 2. *M. F. Ashley Montagu.*—LA DIRECCION DEL DESARROLLO HUMANO
» 3. *Gustav Bergmann.*—FILOSOFIA DE LA CIENCIA
» 4. *Christian Bay.*—LA ESTRUCTURA DE LA LIBERTAD
» 5. *Ernest Nagel.*—LA LOGICA SIN METAFISICA
» 6. *Hilbert y Ackermann.*—ELEMENTOS DE LOGICA TEORICA
» 7. *Vernon Van Dyke.*—CIENCIA POLITICA: UN ANALISIS FILOSOFICO
» 8. *Karl R. Popper.*—LA LOGICA DEL DESCUBRIMIENTO CIENTIFICO
» 9. *R. M. Martin.*—VERDAD Y DENOTACION

EN PREPARACION:

Ernest Gellner.—PALABRAS Y COSAS
C. D. Broad.—EL PENSAMIENTO CIENTIFICO
T. C. Schelling.—LA ESTRATEGIA DEL CONFLICTO
Ernest Nagel.—LA RAZON SOBERANA
Richard B. Braithwaite.—LA EXPLICACION CIENTIFICA
Arthur Pap.—TEORIA ANALITICA DEL CONOCIMIENTO

RICHARD M. MARTIN

Verdad y denotación

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS, S. A.—MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
TRUTH AND DENOTATION
publicada por *The University of Chicago Press*, 1958
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

TRADUCCIÓN DE
C. PIERA GIL y V. SANCHEZ DE ZAVALA

© EDITORIAL TECNOS, S. A. 1962
Calle O'Donnell, 27, 1.° izq. T.: 225 61 92; Madrid (9)

Depósito legal: M. 17.116 - 1962

Núm. Registro: 4929 - 62

Sucs. de Rivadeneyra, S. A.—Paseo de Onésimo Redondo, 26.—Madrid.

A la memoria de
ALFRED NORTH WHITEHEAD
el científico,
el filósofo,
el ser humano,
el maestro,
el amigo.

Entra en la ciencia entonces, con la humildad por guía:
arráncale primero toda su carga de orgullo;
aparta todo lo que no es sino vanidad o ropaje,
deleite de aprender o frivolidad;
o trucos para mostrar el alcance del cerebro humano,
mero placer curioso o ingeniosa inquietud;
expurga el todo, poda las partes superfluas
de todas las artes creadas por nuestros defectos;
ve entonces cuán pequeña es la cantidad restante,
la que sirvió al pasado y servirá a los tiempos venideros.

POPE, *Essay on Man*, II, 1

Indice

Pág.

PROLOGO 13

I. ANALISIS FILOSOFICO Y LENGUAJES FORMALIZADOS... 17

A. Formalización—B. Interpretación—C. Ventajas principales de la formalización y la interpretación—D. Lenguajes matemáticos, científicos y filosóficos—E. Explicación y reconstrucción racional—F. Paradojas, lenguaje natural y aproximación—G. Núcleo mínimo de Teoría semántica—H. Sumario.

II. LENGUAJES DE PRIMER ORDEN 45

A. Sistemas lógicos de primer orden—B. Algunos teoremas de las funciones veritativas—C. Teoremas de cuantificación—D. Abstracción—E. Identidad—F. Descripciones singulares y selectivas—G. Formas normales—H. Campos de individuos—I. Lenguaje objeto y metalenguaje—J. Sintaxis y semántica—K. Signos figuras y signos sucesos—L. Algunos lenguajes objeto de primer orden.

III. SINTAXIS DE PRIMER ORDEN 79

A. Elementos primitivos—B. Reglas—C. Algunas propiedades elementales del encadenamiento—D. Algunas definiciones preliminares—E. 'Axioma de *L*'—F. 'Teorema de *L*'—G. Algunos teoremas sintácticos—H. Algunos conceptos ulteriores de Sintaxis.

IV. DENOTACION MULTIPLE: SEMANTICA DE PRIMER ORDEN 105

A. Denotación múltiple—B. Estructura primitiva— C. Algunas definiciones—D. Reglas semánticas—E. Algunos teoremas elementales—F. Algebra booleana de constantes predicativas.

Pág.

V. VERDAD, ADECUACION Y COHERENCIA..... 119

A. Verdad—B. Otras definiciones posibles—C. Demostración de la adecuación—D. Correspondencia—E. Coherencia semántica de *L*—F. Algunos conceptos semánticos ulteriores—G. Coherencia relativa de MS_D^L—H. Autorreferencia—I. Indecidibilidad y verdad.

VI. TEORIA DE CONJUNTOS Y TEORIA DE TIPOS..... 143

A. Sistema *S* de Zermelo-Skolem—B. Definición de 'Axioma de *S*' dentro de MS_D^L—C. Teoría de tipos—D. 'Axioma de T' dentro de MS_D^T—E. Conceptos semánticos dentro de MS_D^T—F. Reinterpretación—G. Sistemas lingüísticos de orden finito.

VII. SATISFACER, DESIGNAR, DETERMINAR..... 163

A. Satisfacer—B. Designar en *T*—C. Determinar en *T*—D. Acerca de la designación y la determinación en *S*—E. La definición de las relaciones semánticas—F. En favor de MS_D^L y de otros metalenguajes semánticos semejantes.

VIII. SEMANTICA INTRADUCENTE (I)..... 177

A. Elementos primitivos—B. Algunas definiciones—C. Verdad—D. Reglas generales de la comprensión—E. Diversas bases posibles.

IX. SEMANTICA INTRADUCENTE (II)..... 189

A. Algebra booleana—B. Algunos teoremas ulteriores—C. Implicación semántica de constantes predicativas.—D. Teoremas lógicos y verdad—E. Hipótesis específicas de la comprensión—F. Teoremas de teoría de conjuntos y verdad—G. Coherencia relativa de la Semántica intraducente.

X. CONSTANTES INDIVIDUALES Y FUNCIONALES..... 209

A. Reajustes sintácticos—B. Constantes individuales y denotación múltiple—C. Abstracción de relaciones—D. Constantes individuales y comprensión—E. Algunos teoremas semánticos—F. Constantes funcionales—G. Autorreferencia y comprensión.

XI. INSCRIPCIONES Y DENOTACION MULTIPLE..... 223

A. Preliminares sintácticos—B. Algunos teoremas elementales—C. Definición de 'Fmla'—D. Definición de 'Teor'—E. Algunos teoremas ulteriores—F. Denotación múltiple y verdad—G. Adecuación—H. Verdad y abstractos vacíos.

Pág.

XII. INSCRIPCIONES Y COMPRENSION 247

A. Preliminares semánticos—B. Algunos teoremas—C. Verdad y conceptos derivados—D. Coherencia y coherencia relativa—E. Constantes individuales e inscripciones—F. Teoría formalizada de las comillas—G. Semántica basada en inscripciones y en figuras.

XIII. CONSTRUCTIVISMO DE PRIMER ORDEN 255

A. El contenido de la máxima—B. Coherencia y economía—C. Constructivismo semántico, nominalismo, realismo y finitismo—D. Clases—E. En favor de la semántica intraducente—F. Semántica mínima—G. Entender un sistema lingüístico—H. Hacia una teoría formal de los sistemas semánticos—I. La paradoja de Skolem.

INDICES 285

Indice de autores.—Indice de materias.—Indice de símbolos de las metateorías formalizadas.—Indice de símbolos especiales.

Prólogo

Todo el que estudia atentamente el lenguaje se interesa por la relación que nombres y predicados guardan entre sí y con los objetos que representan. El estudio de estos temas *semánticos* ha jugado un importante papel en la filosofía y la gramática desde el período griego hasta nuestros días. Hasta hace poco, su discusión filosófica había estado íntimamente ligada a consideraciones más generales de tipo metafísico o epistemológico, y la teoría semántica había sido una rama de una filosofía del lenguaje más amplia. Pero actualmente parece enfocarse dicha teoría independientemente de su lugar en cualquier sistema metafísico o epistemológico. La semántica se plantea ahora problemas más limitados que antes, pero éstos han llegado a ocupar un lugar preferente en la polémica filosófica contemporánea.

En los últimos años, la teoría semántica ha sido enormemente revitalizada por los descubrimientos de la lógica simbólica moderna, descubrimientos tan fundamentales que han hecho de la semántica prácticamente una rama de la lógica. La mayoría de las contribuciones importantes a la lógica moderna (incluyendo en ella a la semántica) han sido de tipo muy técnico, y muchas provienen de matemáticos profesionales. La semántica teórica podría, pues, ser llamada con justicia semántica *matemática;* pero el designarla de este modo podría dar a entender que el tema es de interés limitado, y únicamente pertinente en estudios sobre los fundamentos de la matemática, cuando, por el contrario, abarca materias de gran importancia para fundamentar todo tipo de disciplinas teóricas y sistemáticas. Muy en especial interesa hoy a la metodología de las ciencias la semántica del lenguaje científico. Los conceptos básicos de la semántica son también de interés para las diversas ramas de la filosofía.

Este libro es un estudio de los fundamentos lógicos de la semántica teórica moderna; en él se trata de los conceptos de verdad, denotación, designación, compatibilidad y otros semejantes. Formularemos diversas teorías semánticas, la mayoría de las cuales contienen algo nuevo, por poco que sea, en la concepción o en el modo de tratarlas; algunas son quizá nuevas, otras son ya antiguas y otras, por fin, son viejas teorías que hasta cierto punto planteamos de una manera nueva. No se presupone por parte del lector ningún conocimiento especial, salvo cierta familiaridad con la lógica más elemental de funciones veritativas y de cuantificadores. La complejidad en lo matemático es mínima: en realidad, sólo se hallarán en este libro las matemáticas más sencillas.

Creemos que en el terreno filosófico esto constituye una ventaja más que un defecto, y que ayudará tal vez a hacer asequibles a un público más amplio algunos de los importantes conceptos y métodos de la semántica moderna.

En la semántica se incluyen con frecuencia teorías referentes al análisis del significado al nivel del sentido común, al significado y la expresión en la literatura y el arte e incluso a los proyectos y sistemas encaminados a paliar los males sociales, políticos y económicos del mundo. Este tipo de teorías, algunas de ellas de auténtico interés, descansan generalmente sobre fundamentos no analizados; sus ideas o conceptos fundamentales son frecuentemente poco claros, y sus supuestos básicos no suelen haber sufrido un análisis lógico. Semejantes teorías parecen presuponer algo más básico a modo de subestructura lógica. Cada día es más urgente la necesidad de acercarse a los problemas de naturaleza semántica general a partir de una segura base teórica; pero en este libro la semántica se refiere únicamente a la denotación y otros conceptos conexos con éste, y es, por tanto, algo más limitada, más técnica y más exacta de lo que es usual en tratados filosóficos de índole más general.

Se considera con frecuencia que la semántica contiene también una teoría del significado o de la intensión. La intensión de un término se distingue del objeto que representa de un modo semejante a como, tradicionalmente, la connotación de un término se viene distinguiendo de su denotación. En este libro nos ocuparemos únicamente de teorías semánticas de la extensión o denotación, que generalmente están presupuestas o contenidas de un modo u otro por las teorías sistemáticas de la intensión; pero, aun si nos limitamos a las teorías de la denotación o extensión, tenemos un tema extraordinariamente rico y fascinador: esto se hace patente de un modo especial si prestamos atención a la íntima conexión existente entre la denotación y el concepto semántico de verdad. Uno de los triunfos más importantes de la semántica moderna es el haber proporcionado un riguroso análisis lógico-matemático del concepto de verdad de cierto tipo de sistemas lingüísticos formalizados; la verdad, la denotación y otros conceptos semánticos están estrechamente relacionados entre sí, y una semántica (basada en la denotación) de suficiente alcance debe también contener un concepto de verdad.

Las teorías de que nos ocuparemos van a ser sistemáticas, y únicamente referentes a la semántica de cierto tipo de sistemas lingüísticos formalizados. Las tratamos de un modo sistemático o formal, en el sentido de que presentaremos las mismas teorías semánticas dentro de sistemas lingüísticos formalizados, cuya estructura especificaremos completamente. Describiremos en su integridad—como es habitual—la estructura sintáctica y semántica de los llamados lenguajes «objeto» (los lenguajes cuya semántica se estudia); pero formularemos también cuidadosamente, como sistemas formales deductivos, los llamados «metalenguajes» semánticos (aquéllos dentro de los que se establece la teoría semántica de un lenguaje objeto dado). De este modo ganaremos las máximas claridad y explicitud en la presentación de las diversas teorías.

Se expone en todo lugar, de un modo bastante amplio y completo, cuál es el aparato formal utilizado, y se establecen aquí y allá numerosos teoremas. Se omitirán con frecuencia las demostraciones, pero algunas se esbozarán lo suficientemente, al menos, para manifestar el torso del razonamiento: se dirá cuanto es necesario para que aquéllos que estén familiarizados con las demostraciones de la lógica moderna puedan convencerse sin tener que recurrir a un trabajo detallado de demostración, mientras que los menos expertos no se vean privados del placer de construir por sí mismos demostraciones rigurosas.

Como la semántica teórica se refiere fundamentalmente a problemas del lenguaje, y su presentación aquí presupone sólo la lógica más elemental, el libro puede ser útil para profesionales y estudiantes de lógica, filosofía analítica, epistemología, metafísica, lingüística, filosofía del lenguaje y filosofía de la ciencia. Algunos de los temas que abarca han sido explicados en un seminario de lógica para postgraduados de la Universidad de Pennsylvania durante los últimos años, al cual se admitían también estudiantes calificados aún en período de licenciatura.

Esperamos que en cada página de este libro esté patente la influencia de los escritos sintácticos y semánticos de Carnap, Church, Frege, Goodman, Quine, Russell y Tarski. Sin el trabajo de estos autores, que han ayudado a desarrollar la sintaxis y la semántica modernas, estas teorías no se hubieran podido formular; enumerar detalladamente puntos concretos en que debemos algo parecería, por tanto, bastante gratuito; sin embargo, el autor está en deuda especialmente, en lo referente a los detalles técnicos, con los escritos de Carnap, Church, Goodman, Quine y Tarski, y, por ciertos aspectos de la perspectiva filosófica general, con los de Carnap, Goodman y Quine.

Algunas de las teorías que enunciamos se presentan aquí por vez primera, y pueden, sin duda, mejorarse en varios aspectos; quizá algunas de ellas puedan simplificarse, generalizarse o hacerse más adecuadas de modos diversos. Además, este libro no es obra de un matemático profesional, y por ello se solicita la indulgencia del lector matemático por aquellos errores o faltas de rigor que pueda encontrar en él. Cuando pueda mostrarse que unos enunciados determinados son falsos, esto indicará, al menos (según la reconfortante frase del profesor H. H. Price), que no carecen de sentido. Algunos de los metalenguajes que formulamos pueden ser de escaso interés matemático, pero no pretendemos que lo tengan: el sentido general de este libro es enteramente filosófico, como será obvio por todas partes.

El autor desea expresar su agradecimiento al profesor Carnap por varias críticas y sugerencias de valor, y también al profesor J. H. Woodger por algunas concepciones básicas y muchas discusiones fructíferas. Desde cierto punto de vista, este libro se debe ante todo al profesor Woodger, porque el estudio de algunas de las teorías semánticas desarrolladas aquí se ha abordado inicialmente por sugerencia suya. El autor está también en deuda, de diversos modos, con los profesores Fitch, Hempel y Nagel, que han mejorado con su influencia (pero de un modo que quizá les sea desconocido y desaprueben) el contenido

de este libro. Por otros motivos el autor está en deuda con los profesores Beth y Hiz y con sus colegas los profesores Clarke, Morrow y Schreker. Agradece a Mr. John Beierle, jr.; Miss Ruby Meager; Mr. G. F. Rieman, jr.; Mrs. Beverly Levin Robbins, y Mr. T. R. Savage, sus expertas ayudas editoriales o de otro tipo en la preparación del manuscrito.

El autor desea también expresar su agradecimiento a la John Simon Guggenheim Memorial Foundation y a la Universidad de Pennsylvania, por relevarle de sus deberes académicos durante el curso 1951-52, cuando fue escrito el primer borrador de este libro.

También agradece a la Cambridge University Press, la University of Chicago Press, la Dial Press, la Harvard University Press y la American Mathematical Society su amable autorización para citar pasajes de obras por ellas publicadas.

Por último, debe agradecer al Comité de Investigación de la Universidad de Pennsylvania que le haya facilitado su ayuda en cuestiones escolares.

CAPÍTULO PRIMERO

Análisis filosófico y lenguajes formalizados

El estudio de los sistemas lingüísticos formalizados constituye un método importante y fructífero de abordar los problemas de la filosofía y la metodología de la ciencia contemporáneas. Un lenguaje formalizado es algo artificial, construido conscientemente por el metodólogo. En rigor, quizá no se trate en absoluto de un lenguaje, en el sentido habitual de la palabra, pues consiste más bien en un conjunto preciso de reglas y definiciones explícitamente establecidas para fines dados. Con frecuencia se tiene una considerable libertad para elegir tales reglas y definiciones, y muchos detalles en la formulación son cuestiones de convención. Teniendo presentes unos fines concretos, se construye o elige un sistema lingüístico para servir explícitamente estos fines. Si la finalidad es formalizar la aritmética elemental de los números enteros positivos de determinada manera, el sistema lingüístico se escoge de acuerdo con ello; si, en cambio, la finalidad es formular las leyes que gobiernan la mitosis en la mosca común de la fruta, *Drosophila melanogaster*, el lenguaje se construye teniendo presente este fin. O si, por ejemplo, se desea formular una teoría metafísica o epistemológica de las relaciones entre, digamos, los objetos de la sensación y los objetos físicos, entonces se escoge un sistema lingüístico apropiado que contenga expresiones para los tipos de relaciones y de objetos en cuestión.

Los lenguajes formalizados deben, pues, compararse cuidadosamente con los llamados lenguajes «naturales». Se entiende habitualmente por lenguajes naturales u ordinarios los de uso cotidiano, como el inglés, el swahili o el indostani; son los medios de comunicación más empleados en cuestiones prácticas: nuestra ciencia, nuestra literatura, nuestra tecnología, etc., se expresan habitualmente en ellos, así como nuestros juicios de sentido común. El análisis y esclarecimiento de la estructura del lenguaje natural es una tarea de gran interés filosófico.

Creemos, sin embargo, que el abordar los problemas filosóficos y metodológicos por medio del estudio de los lenguajes formalizados posee algunas importantes ventajas sobre los otros métodos. Son éstas esencialmente las ventajas que los instrumentos refinados de las ciencias rigurosas tienen sobre los procedimientos presistemáticos, groseros y de mera clasificación. ¿Cuáles son exactamente estas ventajas? ¿Qué son

los lenguajes formalizados? ¿Qué ha de lograrse mediante su empleo? ¿Qué relación guardan con la semántica teórica? ¿En qué puede ayudarnos el uso de los lenguajes formalizados para el análisis del lenguaje natural? Intentamos responder ampliamente a estas preguntas en el presente capítulo [1].

En el § A se esboza *a grosso modo* el procedimiento que se emplea para formalizar un lenguaje, y en el § B se discute el método (semántico) de proporcionar a éste una *interpretación*. *Las ventajas principales* de los métodos de formalización e interpretación se enumeran en el § C con algún detalle. En el § D se indica someramente el papel que desempeñan estos métodos en la *ciencia* y el *análisis filosófico*. Se alude en el § E a la relación existente entre la formalización, y la «*reconstrucción racional*» y la «*explicación*». Un importante argumento en favor de los lenguajes formalizados surge de considerar las *antinomias* lógicas y semánticas; éstas se discuten de modo no formalizado en el § F, donde también se indica la *consideración aproximada* de los lenguajes naturales por medio de lenguajes formalizados de gran alcance. En el § G se establece la principal finalidad del libro, es decir, formular una especie de *núcleo mínimo* de teoría semántica sobre el cual puedan basarse sólidamente ulteriores construcciones filosóficas o metodológicas.

A. Formalización

No necesitamos para nuestros fines actuales una definición exacta o rigurosa de lo que es un sistema lingüístico. Bastará con la somera caracterización siguiente [2].

En rigor hemos de distinguir entre un *sistema logístico* formalizado (o cálculo) y un *sistema lingüístico* formalizado (o lenguaje interpretado). El primero está determinado por reglas gramaticales o definiciones que se refieren exclusivamente a los símbolos y expresiones, haciendo abstracción de toda interpretación específica; un sistema lingüístico, en cambio, es un sistema logístico con una interpretación fija determinada dada a algunas de sus expresiones. Por el momento hablemos sólo de cálculos o sistemas logísticos.

En términos generales, un cálculo o sistema logístico formalizado se compone de:

(i) una especificación completa del *vocabulario primitivo*;

(ii) una definición (recurrente o de otra índole) de lo que se entiende por *fórmula* y posiblemente por *término* de este sistema;

(iii) una lista de fórmulas, como *axiomas* o *fórmulas primitivas*;

---

[1] Véanse los siguientes trabajos, recientes o en preparación, sobre este mismo tema: E. W. Beth, «Carnap's views on Constructed Systems vs. Natural Languages in Analytic Philosophy», *The Philosophy of Rudolf Carnap (The Library of Living Philosophers*, en preparación); E. Hutten, «Natural and Scientific Language», *Philosophy*, XXIX, núm. 108 (1954), pp. 27-43; R. B. Braithwaite, *Scientific Explanation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953), especialmente cap. I; H. Wang, «On Formalization», *Mind*, LXIV (1955), pp. 226-38; y J. H. Woodger, «Mathematical Logic as a Tool of Analysis», en preparación.

[2] Véase, más adelante, el capítulo XIII, §H.

(iv) algunos enunciados acerca del sistema (las *reglas de deducción)* que indican en qué circunstancias una fórmula ha de considerarse como *consecuencia inmediata de* una o varias fórmulas (o *inmediatamente demostrable a partir de ellas);*

(v) una lista de fórmulas que muestren explícitamente ser *teoremas*, es decir, demostrables a partir de los axiomas por medio de las reglas de deducción; y

(vi) una lista de enunciados acerca del sistema que nos permitan *abreviar* expresiones según procedimientos especificados.

Esta somera descripción no pretende en modo alguno ser una definición exacta, y existen quizá sistemas que podrían llamarse 'formalizados' a los cuales no quepa aplicarla. Pero en todo este libro hablaremos únicamente de sistemas de cierto tipo determinado (ver el capítulo II) a los cuales sí se aplica; además, en la bibliografía sobre lógica y metodología modernas, la mayor parte de los sistemas formalizados importantes son también de este tipo.

Ocupémonos ahora con mayor detalle de los diversos elementos que constituyen el sistema formalizado. Tenemos primero una especificación *in toto* del vocabulario primitivo. Se obtienen las *expresiones* de un sistema con ciertos signos o símbolos y además con todas las posibles series finitas de ellos. Los signos o símbolos que se emplean son los signos *primitivos;* su número puede ser finito o bien infinito, pero numerable; cualquier resultado de colocar dos o más signos primitivos en un orden consecutivo, lineal (habitualmente de izquierda a derecha), es una *serie* o expresión compuesta. Podemos, pues, describir las expresiones como los signos primitivos y además todas sus series o compuestos. La longitud de cada serie es finita, aunque por regla general se supone que la totalidad de las series es infinita numerable. (Se han propuesto algunos sistemas que contienen incluso expresiones de longitud infinita.)

Habitualmente hay dos clases de signos primitivos, las *constantes* y las *variables;* las constantes se llaman así porque aquello que representan o designan permanece constante a través del discurso dado; las variables, en cambio, en rigor no denotan o designan: se dice más bien que *abarcan* un campo de objetos determinado. Habitualmente existe un número infinito de variables de cada clase, aunque esto no es, en rigor, esencial. El papel que las variables desempeñan en los lenguajes que se han de tratar es de la mayor importancia: gracias a ellas, principalmente, se puede lograr la generalidad en el discurso, se puede hablar de *todos* los objetos, de *algunos* objetos, de *ningún* objeto, etcétera. Todos los sistemas que se han de tratar contienen variables, aunque se han construido sistemas lingüísticos de gran alcance que no las contienen.

Con frecuencia, también las constantes son de diferentes clases: existen constantes *lógicas*, constantes *predicativas*, constantes *individuales* y constantes *funcionales* o *funtores*. Más adelante especificaremos las características de estos tipos diversos de constantes (véase el capítulo II). Aunque cualquier serie finita de los signos primitivos es una expresión del sistema, sólo algunas series se consideran *fórmulas;* éstas

son llamadas también a veces *funciones proposicionales*. Las fórmulas pueden ser o no del tipo al que se atribuiría verdad o falsedad: si lo son se llaman *proposiciones*, y en caso contrario *funciones proposicionales estrictas*. Por ejemplo, '*x* es un cuáquero' (siendo '*x*' una variable) puede ser una fórmula en algún sistema apropiado, pero no es ni verdadera ni falsa en este sistema mientras no se especifique algo más acerca de '*x*'. Las funciones proposicionales estrictas de un sistema son tales que se transforman en proposiciones (y, por tanto, en verdaderas o falsas) de modos fáciles de describir. Por volver a nuestro ejemplo, '*x* es un cuáquero' se transforma en una proposición verdadera de este sistema si en lugar de '*x*' ponemos el nombre propio 'Rufus Jones'; se transforma en una proposición falsa si prefijamos a ella la frase cuantificadora 'para todo *x*' y pensamos que '*x*' abarca todos los seres humanos.

El concepto de fórmula se define con frecuencia por medio del procedimiento llamado *recurrente:* la definición se da primero para los casos más simples (fórmulas *atómicas)* y después, suponiendo que haya que darse para casos de cierta complejidad, se la da para casos complejos que en cierto modo presuponen la definición o definiciones para los menos complejos (las definiciones para los casos más complejos presuponen, o se refieren a, o recurren a las definiciones para los más sencillos): de este modo se abarcan todos los casos posibles. Así, al definir lo que se entiende por fórmula, estipulamos primero lo que son las fórmulas más simples (atómicas), y después cómo las fórmulas más largas *(moleculares)* se construyen a partir de otras más breves. Este tipo de definición es muy fácil para formular sistemas lingüísticos y lo emplearemos con frecuencia de un modo no formalizado en los próximos capítulos.

Algunas series de expresiones primitivas del sistema se llaman *términos:* son expresiones que, bien por sí mismas, bien alteradas de un modo especificable, pueden considerarse referentes a objetos. Por sí misma, una variable es un término y cualquier constante individual también; asimismo lo son las expresiones apropiadas que contienen constantes funcionales (funtores). En un lenguaje aritmético, por ejemplo, en el que '+' sea un funtor primitivo, una expresión como '$(x + y)$' puede ser un término. Si en lugar de '*x*' e '*y*' ponemos aquí nombres de números concretos obtenemos un nombre para la suma de estos números.

La especificación completa del vocabulario primitivo es el primer paso hacia la formalización de un lenguaje, y la definición rigurosa de 'fórmula', y posiblemente de 'término', el segundo. El tercero es indicar ciertas fórmulas o proposiciones como axiomas o fórmulas primitivas, cuyo número puede ser finito o infinito pero numerable. En la práctica se escogen únicamente como axiomas aquellas fórmulas que, en la interpretación deseada, son válidas o verdaderas; también se prefiere generalmente adoptar como axiomas enunciados de considerable alcance deductivo. A veces los axiomas se denominan también *postulados* o *supuestos*.

Supongamos que tenemos ya una especificación completa de los axiomas. En rigor no podemos *demostrar* nada a partir de ellos mientras no dispongamos también de *reglas de deducción*. Estas son enunciados explícitos *acerca* del sistema, que no forman parte de él, y que establecen que a partir de una o varias fórmulas del sistema de tal y cual forma o formas puede deducirse otra fórmula. En otras palabras, las reglas de deducción suelen establecer que a partir de fórmulas A_1, A_2, ..., A_n puede deducirse otra fórmula **B**. La forma de **B** está habitualmente estrechamente relacionada con las de A_1, ..., A_n, o determinada por ellas. Con frecuencia, sobre todo en obras antiguas, las reglas de deducción no se establecen explícitamente; de hecho, la distinción clara entre el concepto de axioma y el de regla de deducción es muy reciente: ni siquiera en una obra como *Principia Mathematica* [1] queda clara esta distinción, a pesar de lo cual un momento de reflexión basta para convencernos de que es fundamental. Habitualmente sólo se requieren dos o tres reglas de deducción y éstas son, generalmente, de tipo muy simple. (Véase el capítulo II, § A.)

El que las reglas de deducción hayan de conservar la verdad en la interpretación que se quiere dar al sistema constituye una importante restricción en la elección de estas reglas. En otras palabras, partiendo de proposiciones verdaderas, las proposiciones que puedan deducirse de ellas por medio de reglas han de ser también verdaderas. Una regla de deducción que careciese de esta propiedad no sería conveniente, porque nos permitiría deducir falsedades de verdades.

La principal finalidad que se persigue al formular axiomas y reglas de deducción es poder deducir o demostrar teoremas; en términos generales, *demostrar* una fórmula **A** es mostrar una serie finita de fórmulas (de las cuales **A** es la última) tal que cada una de ellas, o bien es un axioma o bien puede obtenerse a partir de fórmulas anteriores de la serie por medio de una regla de deducción. Los *teoremas* del sistema son, pues, por definición, las fórmulas para las cuales existen demostraciones. Si los axiomas son proposiciones verdaderas y las reglas de deducción son tales que conservan la verdad, entonces los teoremas son también verdaderos. Con frecuencia, algunos de los teoremas pueden intercambiarse con los axiomas, y la elección acerca de qué fórmulas han de ser axiomas y cuáles teoremas es hasta cierto punto arbitraria.

Finalmente, suele ser conveniente abreviar las expresiones más largas del sistema según procedimientos explícitamente establecidos: los enunciados acerca del sistema que estipulan estas abreviaciones suelen llamarse *definiciones*. En rigor, la única función de las definiciones es abreviar; nos permiten simplemente escribir series cortas de símbolos en lugar de otras más largas. Semejantes abreviaciones no son estrictamente esenciales para el desarrollo del sistema; podríamos prescindir totalmente de ellas, aunque en la práctica facilitan enormemente el discurso a la vez dentro del sistema y acerca de él. La expresión que se define suele llamarse *definiendum* y aquella por medio de la cual es definida, *definiens*.

[1] A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL, *Principia Mathematica* (Cambridge University Press, Cambridge, 1910-13 (1.ª edición), 1925-7 (2.ª edición).

B. Interpretación

En la sección anterior tratábamos únicamente de cuestiones sintácticas o de notación: hablábamos sólo de los símbolos y expresiones del sistema y no de los objetos a los cuales se supone que se refieren las expresiones o que éstas denotan o representan de un modo u otro. Cuando se habla de este modo puramente *sintáctico*, haciendo abstracción del sentido o denotación de las expresiones, no se hace, naturalmente, otra cosa que posponer algunos de los problemas más fundamentales e interesantes que plantean el análisis y la construcción del lenguaje; pero parece más conveniente esclarecer primero el aspecto puramente sintáctico de un lenguaje antes de abordar el estudio de la denotación o del sentido: plantarse *in medias res* de los difíciles problemas del sentido sin una sólida base sintáctica parecería arriesgado. No cabe duda de que prácticamente todo el mundo asentiría a esto en principio, pero con frecuencia se olvida en la práctica. La semántica presupone la sintaxis, como veremos en el curso de nuestra investigación; por lo tanto, hay que esclarecer las propiedades sintácticas de un sistema lingüístico antes de poder estudiar con algún cuidado sus propiedades semánticas.

Dado un sistema logístico formalizado, podemos atribuirle generalmente varias interpretaciones diferentes. En términos generales, una interpretación consiste en asignar sistemáticamente unos objetos denotados a parte del vocabulario primitivo. Las constantes individuales se consideran representativas de determinadas entidades que se especifican claramente (habitualmente, distintas constantes individuales se considera que representan entidades distintas, aunque esto no es esencial). Se suelen describir las constantes predicativas diciendo que representan propiedades bien determinadas de clases de entidades o de relaciones entre ellas. Pero no pueden asignarse de este modo objetos denotados a todos los símbolos primitivos: supongamos, por ejemplo, que el lenguaje contiene paréntesis; éstos desempeñan simplemente un papel de signos de puntuación y propiamente no denotan. Tampoco las llamadas constantes lógicas como 'y', 'o' 'si y sólo si', etc., han de considerarse denotadoras; naturalmente, tales palabras tienen un importante papel que desempeñar, como hemos de ver, pero este papel no es en rigor el de denotar.

Hemos estado empleando las palabras 'sentido' y 'denotación' de un modo completamente ajeno a la formalización y como sinónimos aproximados. Con frecuencia se hace una distinción entre ambas palabras algo parecida a la distinción tradicional [1] entre connotación y denotación, o entre la intensión y extensión de los términos; 'sentido' se suele tomar entonces aproximadamente por 'connotación'. Pero la palabra 'sentido' no se usará en lo sucesivo como término técnico, ni en realidad se ha usado así antes, pues por el momento sólo nos interesa la denotación o referencia en sentido extensional.

---

[1] La tradición a que se refiere aquí el autor arranca de J. Stuart Mill. *(N. de los T.).*

Los sistemas logísticos formalizados no suelen tener interés de por sí; solamente lo adquieren cuando se interpretan de un modo apropiado. La semántica es el estudio del modo en que una interpretación se atribuye explícitamente a un sistema logístico formalizado: en las teorías que hemos de desarrollar aquí se logra tal cosa por medio de *reglas* o *axiomas semánticos*. La semántica se concibe aquí ante todo, por tanto, como el estudio de las reglas semánticas.

En el § A hemos indicado seis apartados que constituyen *a grosso modo* un sistema logístico. Si les añadimos

(vii) una lista de reglas o axiomas semánticos,

obtenemos una interpretación explícita. Un sistema logístico formalizado con una interpretación especificada se llama también *sistema semántico* o *sistema interpretado*.

Generalmente pueden darse varias interpretaciones diferentes a un sistema logístico no interpretado; todas ellas tendrán, naturalmente, algo en común, serán semejantes en ciertos aspectos; pero también puede haber diferencias importantes. Habitualmente una interpretación será la básica, previa o *típica*, siendo entonces las otras *atípicas*. El estudio de las interpretaciones atípicas de ciertos sistemas matemáticos ha resultado ser uno de los capítulos más fascinadores de la semántica matemática. Mas la pauta general que se sigue para dar una interpretación atípica a un sistema logístico es la manera de dar la típica; y puesto que los lenguajes objeto de los que se trata al estudiar las interpretaciones atípicas son primordialmente lenguajes matemáticos, tendremos aquí poco que decir que les concierna específicamente. (Véase, sin embargo, el capítulo XIII, § I.)

Dentro de los sistemas lingüísticos formalizados (en una interpretación dada) se habla de ciertos objetos, atribuyéndoles o negándoles propiedades, diciendo que ciertas relaciones se dan o no entre ellos, etcétera. Puede decirse que estos objetos, junto con las propiedades o relaciones, son el *asunto* del sistema en esta interpretación. El asunto puede variar en diferentes sistemas lingüísticos, así como en diferentes interpretaciones del mismo sistema logístico subyacente. Algunos lenguajes tienen como objetos fundamentales neutrones, protones, mesones, etc., junto con relaciones existentes entre ellos: por ejemplo, un lenguaje que se aplicase a ciertos campos de la física nuclear. Otros pueden tener seres humanos y relaciones diversas entre ellos como objetos fundamentales, por ejemplo, un lenguaje sociológico. Otro también puede tener como objetos fundamentales las composiciones musicales de Mozart: por ejemplo, un lenguaje formalizado que contenga un análisis exacto de la estructura de las obras de Mozart. En principio, absolutamente todo asunto claramente delimitado puede dar lugar a un lenguaje formalizado; naturalmente, la formulación de algunos de estos sistemas sería sencilla o directa y la de otros muy compleja y difícil; unos podrían carecer de importancia o de interés para la ciencia, la filosofía o la vida diaria, mientras que otros tratarían tal vez de importantes campos del conocimiento humano.

Hemos observado que la semántica, en el sentido en que viene usándose aquí esta palabra, es el estudio del modo en que se da una

interpretación explícita a los sistemas logísticos formalizados. Por tanto, el razonamiento que sea preciso exponer acerca de la importancia de los sistemas lingüísticos formalizados para la metodología y el análisis filosófico será también un razonamiento acerca de la importancia de la semántica. En algunos círculos filosóficos existe escaso interés por la semántica teórica moderna; algunos metodólogos dudan de su utilidad para la filosofía de la ciencia; muchos filósofos analíticos arguyen que la semántica tiene poco que aportar al análisis directo del lenguaje natural. Pero si los razonamientos que vamos a presentar ahora acerca de la importancia de los sistemas lingüísticos formalizados están bien fundados, se verá que los métodos de la semántica teórica moderna tienen una significación metodológica y filosófica mayor que la que suele reconocérseles.

C. Ventajas principales de la formalización y la interpretación

Hemos llegado a una idea aproximada de lo que son los sistemas lingüísticos y de lo que implica proporcionarles una interpretación. ¿Qué pueden aportar los lenguajes formalizados con interpretaciones determinadas al análisis filosófico y a la metodología de las ciencias?

El primer punto y el más evidente que hay que destacar es la claridad y precisión que resultan de los procedimientos actuales de formalización e interpretación. Al formalizar un lenguaje damos, en efecto, un cuidadoso análisis lógico del asunto de dicho lenguaje; al escoger los elementos primitivos, al precisar su denotación, al definir otras expresiones a partir de ellos, al establecer explícitamente los supuestos básicos, etc., se logra una claridad y precisión que quizá sea imposible alcanzar por otro método cualquiera: aquéllos que han utilizado ampliamente estos procedimientos atestiguan esta situación, que sólo niegan quienes no lo han hecho.

El método de formalización ayuda también a la intuición en cualquier campo al cual se aplique. De hecho, esta ayuda es tan grande que muchos piensan que éste es el argumento supremo en pro de los lenguajes formalizados: frecuentemente nuestras intuiciones más fundamentales en un terreno dado resultan indignas de crédito; especialmente, quizá, cuando el asunto se vuelve cada vez más complejo (como en una ciencia ampliamente desarrollada o en un sistema metafísico): pues se alcanza un punto en el que la intuición no puede abordar sin ayuda los problemas y situaciones que se presentan. La presencia de la paradoja de Russell —y de otras— en la teoría matemática de conjuntos, por ejemplo, puede darse como muestra de los errores a que conduce nuestra intuición simple acerca de la relación de pertenencia a conjuntos (véase el capítulo VI, § C, más adelante). Si en estos asuntos confiamos solamente en la intuición abocamos en una contradicción. Al formalizar un asunto dado nuestras intuiciones se aguzan y quizá se corrigen (cuando semejante corrección es necesaria); el método lima la intuición en su estado primitivo, ayudándola y estimulándola mediante un cuidadoso escrutinio de los elementos primitivos y de los diversos axiomas y definiciones posibles.

Hay que señalar también que la deducción sistemática dentro de un sistema lingüístico formalizado es una auténtica medida de protección contra el pensamiento defectuoso: incorporando una frase o término científico, metodológico o filosófico a una estructura sistemática bien trabada, reducimos al mínimo los riesgos de error y nos protegemos contra modos de pensar negligentes o resbaladizos. Este método proporciona igualmente un juicio crítico sobre los términos o conceptos cuyo carácter exacto plantea dudas: la aguda crítica que sufre un término para incorporarse a un lenguaje formalizado constituye una inapreciable contribución a su análisis; Woodger ha observado que «es una buena norma práctica, cuando nos enfrentamos con una palabra cuya respetabilidad científica [o filosófica] ofrece dudas, preguntar: ¿Cuál es su extensión? ¿De qué grado es? [Es decir, ¿es un término individual? ¿Un término de clase? ¿Un término de relación diádico? ¿Si no, qué es?] Si no aparece una respuesta clara, la palabra debe considerarse sospechosa y usarse con precaución» [1].

El establecer *todos* los supuestos hechos en un terreno de conocimiento dado o en un contexto dado de investigación es una exigencia fácil de instituir en principio, pero con frecuencia sumamente difícil de seguir en la práctica. Muchas veces se necesitan más supuestos o axiomas de los que parecen necesarios a primera vista y éstos son, muchas veces, difíciles de establecer: pueden escapar a nuestra captación intuitiva o presentar otras dificultades para la formulación. No cabe duda de que es un desideratum tener una especificación completa de los principios (o leyes) empleados —o presupuestos— en una ciencia o discurso sistemático dado; la formalización de un lenguaje nos permite lograr tal cosa explícitamente.

Otra ventaja del método de formalización es que proporciona un modo eficaz de educir las *consecuencias* de nuestros supuestos. Frecuentemente, la intuición nos conduce a pensar que tal y cual fórmula se sigue de los axiomas, mas comprobamos, después de un análisis más detenido, que realmente no es así. El examen de las consecuencias de los supuestos nos capacita también para captar mejor su plena significación. A veces surgen consecuencias insospechadas, quizá incluso inadecuadas: cuando esto sucede, los axiomas o definiciones suelen necesitar de algún cambio. El *único* método que tenemos de extraer de un modo explícito las consecuencias de los axiomas es mediante reglas deductivas de inferencia dentro de los límites de un sistema lingüístico formalizado.

Al establecer una interpretación para un sistema formalizado enunciando explícitamente las reglas semánticas, empleamos otro lenguaje, el llamado *metalenguaje*. (Se supone que entendemos el metalenguaje.) Las reglas semánticas están encuadradas en el metalenguaje y enuncian específicamente que las expresiones apropiadas del sistema lingüístico dado denotan tales y cuales objetos; dando por supuesto que entendemos el metalenguaje, llegamos también a entender el lenguaje objeto,

---

[1] J. H. WOODGER, *Biology and Language*, Tarner Lectures (Cambridge University Press, Cambridge, 1952), p. 26.

y el procedimiento de interpretación se hace explícito de este modo. (Cf. el capítulo XIII, §§ E y G.)

Incluso la importante distinción entre lenguaje objeto y metalenguaje puede mantenerse con claridad por referencia a los sistemas lingüísticos formalizados. Esta distinción tiene una gran significación y es difícil, si no imposible, hacerla en otros términos; su importancia metodológica, establecida ahora fuera de toda duda, constituye otro argumento en pro de los lenguajes formalizados. (Trataremos este punto más ampliamente en el § I del capítulo II y también en otros muchos sitios.)

Todavía otra importante distinción, a la que ya hemos aludido; la que se hace entre sintaxis y semántica. El mejor modo de trazarla es, sin duda, a base de los diferentes tipos de metalenguajes que se necesitan en cada caso. (Trataremos de esto más ampliamente en el capítulo II, § J, y por doquier.)

Los lenguajes formalizados proporcionan igualmente una *base para investigaciones metateóricas*. Proporcionan, en otras palabras, estructuras lingüísticas manejables que pueden investigarse *como totalidades*. Este tipo de estudios parece dividirse fundamentalmente en dos grupos: los que tratan de las propiedades matateóricas de un solo sistema y los que se ocupan de las relaciones existentes entre dos o más sistemas. Se ha trabajado mucho en la primera dirección y se han sometido varios lenguajes importantes a un estudio metateórico detallado. Pero apenas se han rozado los problemas del estudio comparativo de lenguajes, salvo quizá en la matemática; estos estudios comparativos tratarían de las relaciones mutuas entre ciencias o campos diversos de conocimiento, de la reducción de una ciencia a otra, de la comparación de un sistema filosófico con otro, etcétera.

Una propiedad metateórica muy estudiada es la de *compatibilidad* o *coherencia*. En las ciencias y en la filosofía parece esencial asegurarse, aunque sea de un modo muy aproximado o tosco, de que el sistema lingüístico que se emplea es coherente (en el sentido de no contener contradicciones). La ciencia, en términos muy generales, puede considerarse una actividad de selección de las proposiciones que son verdaderas entre todas las referentes a un asunto dado; pero esta actividad carece de base cuando el sistema lingüístico en el cual están encuadradas dichas proposiciones no es coherente: pues, si el lenguaje es incoherente, puede hacerse ver —empleando sólo principios sin duda alguna aceptables— que la extensión de 'verdadero' abarca todas las proposiciones del lenguaje, cualesquiera que sean (véase el capítulo V, § E), con lo que se anula la distinción entre verdad y falsedad.

El problema de demostrar la coherencia de ciertos lenguajes formalizados ha hecho surgir un tipo importante de investigación metateórica; en realidad, el problema de la compatibilidad o coherencia se considera con frecuencia uno de los centrales de la lógica moderna. Han surgido inmensas dificultades que parecen impedir la obtención de demostraciones de compatibilidad satisfactorias para los lenguajes de alcance suficiente; tal vez resulte que estas demostraciones son imposibles; pero no cabe duda de que un lenguaje coherente, lo sea o no de un modo *demostrable*,

es preferible a un lenguaje que sepamos es incoherente. Es difícil explicar por qué la incoherencia, en el sentido básico que damos aquí a la palabra, es algo tan aborrecible para el intelecto humano, pues el hacerlo quizá requiera un análisis de ella más detenido que los que se han hecho hasta ahora. (Véase de nuevo (V, E).) Sea como fuere, el único medio de abordar el problema de la coherencia es fundamentalmente el estudio de los lenguajes formalizados, ya que sólo los sistemas lingüísticos son coherentes o no (en el sentido quizá fundamental de la palabra) [1].

Otra propiedad metateórica importante y ampliamente estudiada de los sistemas lingüísticos formalizados es la *completitud.* Decir que un sistema es completo, en un sentido apropiado de la palabra, significa decir, en términos generales, que toda proposición de dicho lenguaje que sea verdadera en una interpretación especificada es también demostrable a partir de los axiomas; los axiomas de un sistema que es completo en este sentido caracterizan totalmente aquello que es verdadero dentro de su asunto. Otro modo de expresar que un sistema lingüístico es completo consiste en decir que, para cada proposición del lenguaje, o ella o su negación son demostrables. Dentro de un sistema formal metateórico apropiado, y para un lenguaje objeto apropiado, estas dos caracterizaciones de la completitud son equivalentes. (Véase (V, F).) Aunque es muy deseable que un sistema formal sea completo, se encuentra muchas veces que falta esta propiedad, especialmente en los sistemas lingüísticos de gran alcance deductivo. Pero no por ello deja de ser una especie de ideal, aun cuando los sistemas científicos y filosóficos más importantes no llegan a alcanzarlo. (Véase (V, H-I).)

Una vez que se ha determinado cuáles son los signos primitivos (no definidos) de un lenguaje, se introducen nuevas expresiones mediante definiciones. Las definiciones han de darse, evidentemente, en determinado orden, a fin de evitar los círculos viciosos. En rigor, siempre pueden eliminarse los signos definidos, y el orden en el cual se eliminan dos signos definidos debe ser indiferente. Existen definiciones tales que introducen abreviaciones para expresiones que contenían otras ya definidas; de este modo se establece una especie de orden entre las definiciones, aunque totalmente extraño al desarrollo del sistema a partir de los elementos primitivos; pero, cuando consideramos la interpretación del sistema, el orden en el cual hemos establecido las definiciones engendra un orden correspondiente en nuestras ideas: partimos de determinadas expresiones primitivas, cuya interpretación está fijada, para llegar a series más largas de expresiones primitivas (que se hallan abreviadas en las definiciones) y cuya interpretación depende por completo de la dada a los elementos primitivos.

Asimismo, el hacer estas listas sistemáticas de definiciones nos permite comparar con más conocimiento de causa las consecuencias de las diversas definiciones posibles y ponderar así sus ventajas relativas. Gran parte del pensamiento sistemático trata de la definición. Desde un punto de vista estricto, las definiciones son meras abreviaciones, como

[1] Por supuesto, se suele hablar de un razonamiento *coherente*, de premisas *coherentes*, de comportamiento *coherente*, etc. Pero estos usos son derivados.

hemos indicado, pero, como señala Whitehead, «...si abandonamos el punto de vista estrictamente lógico, vemos al momento que las definiciones constituyen la parte más importante del tema. El acto... [de dar una definición] ...es de hecho el acto de elegir las diversas ideas complejas que han de ser el especial objeto de estudio. Todo el tema estudiado depende de semejante elección» [1]. Sólo dentro del marco de un lenguaje formalizado pueden darse definiciones en el sentido estricto de la palabra y, por tanto, sólo dentro de este marco pueden determinarse cuidadosamente las ventajas y desventajas relativas de las diversas definiciones posibles.

El enunciado explícito de axiomas y reglas y la demostración sistemática de teoremas por medio de ellos establecen un orden y una sucesión en nuestras aserciones o teoremas, del mismo modo que las series de definiciones lo establecen en nuestras ideas. Esta ordenación suele constituir una ayuda inmensa para el aprendizaje, por lo cual resulta pedagógicamente útil: cualquiera que sea su nivel de madurez, los estudiantes, una vez que se han familiarizado con las reglas básicas de la formalización, encuentran que la presentación sistemática de un asunto facilita mucho su aprendizaje; cuando han llegado a dominar dichas reglas básicas, no suelen quedar satisfechos con la presentación amorfa de un asunto que es más habitual. Y tampoco es en absoluto difícil dominar estas reglas. La notación lógica, como ha dicho Woodger, «no tiene nada de particularmente erudito o exótico; nos permite expresar con brevedad y precisión ideas (en su mayoría perfectamente familiares) que el lenguaje ordinario expresa de un modo largo y ambiguo; su campo de aplicación es sumamente amplio...; el uso permite familiarizarse pronto con ella y, con cierta práctica, su manejo se vuelve rápido y cómodo; se está empezando a reconocer como instrumento indispensable en toda investigación exacta. En cuanto a su generalidad, los conceptos esenciales de los *Principia Mathematica* tienen títulos iguales, si no mejores, que el álgebra y la geometría tradicionales, para ser 'enseñados en las escuelas' [2].

Aunque los lenguajes naturales bastan para realizar muchos fines intelectuales y de comunicación, se requiere con frecuencia una precisión mucho mayor de la que pueden proporcionar, sobre todo en el discurso filosófico científico. Woodger ha subrayado esto con fuerza al escribir que un lenguaje natural «no sólo sirve para la comunicación en sentido científico. También se usa para escribir poesía, para la devoción religiosa, para la controversia política y para convencer a la gente de que compre algunos productos de la actividad industrial que en caso contrario no le apetecerían. Estos fines tienen para con el lenguaje exigencias muy diferentes de las que tiene la ciencia. Las exigencias de la ciencia [y de la filosofía] se muestran al que las investiga sorprendentemente reducidas, de modo que la excesiva riqueza de un lenguaje natural, como el inglés, es una fuente de perplejidades. Nos induce a

---

[1] A. N. Whitehead, *The Axioms of Projective Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1906), p. 2.

[2] J. H. Woodger, *The Axiomatic Method in Biology* (Cambridge University Press, Cambridge, 1937), p. IX.

emplear recursos lingüísticos extraídos de usos extra-científicos [o extra-filosóficos] que pueden tener consecuencias desafortunadas. Las metáforas, por ejemplo, que abundan en algunas ramas de la biología, son frecuentemente sugestivas y pueden ser inofensivas si se reconoce lo que son. Pero, en el mejor de los casos, no hacen sino suplir y sustituir a auténticos enunciados biológicos, y el hecho de recurrir a ellos implica, con seguridad, falta de madurez científica. La ciencia exige una gran austeridad y disciplina lingüísticas, y los cánones del buen estilo en la escritura científica son diferentes de los establecidos para otras actividades más o menos literarias» [1].

La formalización de un sistema lingüístico que exprese un campo dado de la teoría científica o filosófica nos permite poner en claro los escasos recursos lingüísticos necesarios y separar así los elementos lingüísticos esenciales de los que no lo son. Entre los esenciales se hallan algunos que son comunes a todos los sistemas y otros que sólo sirven para uno o varios sistemas particulares. Los elementos esenciales comunes constituyen el vocabulario *lógico*, y los otros, el *no lógico* o *descriptivo*. (Véase el capítulo II.) Mediante la formalización logramos una enumeración explícita del vocabulario lógico y no lógico necesario: esta enumeración, junto con la definición de 'fórmula', el enunciado de los axiomas y reglas, etc., constituye una caracterización precisa de la *estructura lógica o lingüística* de la disciplina en cuestión.

Los lenguajes formalizados muestran también ventajas como medios de comunicación en toda disciplina exacta o ampliamente desarrollada. Están explícitamente encaminados a facilitar la formulación de reglas semánticas y la definición de nuevos términos, razón por la cual la comunicación dentro de estos lenguajes es a la vez más fácil y más eficaz que cuando se emplean medios menos exactos.

Al extendernos tanto sobre la importancia de la formalización para el análisis filosófico y la metodología de las ciencias, no pretendemos haber dicho nada fundamentalmente nuevo. El punto de vista que hemos planteado presenta rasgos esenciales antiguos, y por él han abogado con frecuencia algunas de las grandes figuras de la historia de la filosofía. Parece tener su origen en Platón; A. E. Taylor ha comparado la *dialéctica* platónica con el método de formalización: «podemos decir que lo que la *República* llama 'dialéctica' no es, en principio, nos dice, otra cosa que la rigurosa e ingrata labor de prudente escrutinio de los elementos indefinibles e indemostrables de las ciencias, y que, en particular, ...el ideal [de Platón], hasta donde alcanzan las ciencias de las que él trata directamente, no es sino esa reducción de la matemática a la deducción rigurosa a partir de premisas lógicas formuladas expresamente y mediante métodos lógicos especificados con exactitud, de la cual la obra de Peano, Frege, Whitehead y Russell nos ha dado un magnífico ejemplo» [2].

Las ideas esenciales de los métodos de formalización e interpretación han impregnado profundamente la mentalidad occidental y cons-

---

[1] *Biology and Language*, pp. 7-8.

[2] A. E. Taylor, *Plato the Man and His Work* (Dial Press, New York, 1936 (1.ª edición en 1922)), p. 293.

tituyen tal vez el prototipo ideal de algunos aspectos de lo que llamamos pensamiento *racional.* Muchos filósofos y metodólogos usan los rasgos esenciales de estos métodos sin tener quizá conciencia clara de ello. Pero no puede saberse demasiado de métodos que se emplean constantemente; una mayor conciencia de los detalles de formalización e interpretación ayudaría a elevar el nivel medio de la polémica filosófica y metodológica.

D. Lenguajes matemáticos, científicos y filosóficos

La técnica de la formalización ha logrado, sin duda, su mayor éxito hasta la fecha en su aplicación a la matemática. Se han establecido y estudiado meticulosamente dos clases de lenguajes formalizados de gran alcance, de especial importancia para la matemática: los basados en la *teoría zermeliana de conjuntos* y los basados en la *teoría de tipos de Russell.* (Véase el capítulo VI. Existen —naturalmente— otras clases, derivadas de la teoría de conjuntos, pero todas ellas parecen combinar de diversas maneras unas características que se hallarán siempre en uno u otro de estos dos tipos fundamentales.) Sin embargo, apenas puede pretenderse que estos lenguajes hayan demostrado, hasta ahora, tener interés para el matemático *activo;* no cabe duda de que su formulación es un capítulo importante en la historia del rigor matemático, pero el rigor es un tema secundario en la vasta estructura de la matemática moderna: los más importantes descubrimientos matemáticos han sido, sin duda, de tipo sumamente intuitivo, y es discutible si el uso de lenguajes formalizados llegará a contribuir verderamente a la realización de *descubrimientos* matemáticos.

Pero los lenguajes formalizados tienen interés en la investigación *acerca de* la matemática y de varios de sus campos *en conjunto.* En este terreno ha surgido un nuevo cúmulo de problemas cuyo estudio ha dado lugar al desarrollo de una nueva ciencia, la metamatemática. Esta constituye otro aspecto de la matemática del siglo xx, junto con la topología, el álgebra moderna o la estadística matemática. La metamatemática presupone y utiliza la técnica de la formalización, pero sólo de un modo preliminar (aún quedan problemas por resolver acerca del mejor modo de formalizar una teoría matemática dada para fines metamatemáticos determinados); mas la formalización *qua* formalización quizá carezca de importancia para la matemática salvo como preludio a la metateoría: el asunto de los lenguajes matemáticos es tan preciso y claramente delimitado, y los matemáticos penetran en ellos de un modo tan intenso y profundo, que la formalización de un aspecto de la matemática no es muchas veces más que un procedimiento mecánico o rutinario.

Cuando nos enfrentamos con un asunto menos exacto hallamos una situación muy diferente. Los conceptos y nociones, incluso, de las ciencias físicas, cuyo desarrollo está muy avanzado, rara vez son tan precisos como en la matemática; las definiciones son vagas y, con frecuencia, están mal formuladas, o, en el mejor de los casos, los términos

están sólo parcialmente definidos. La naturaleza de la lógica subyacente se especifica muy pocas veces, si es que se ha especificado alguna vez, de forma que frecuentemente se ignora si determinados principios lógicos (o de otra índole) pueden usarse en un contexto dado, e incluso si de hecho se usan. En terrenos semejantes el método de formalización tiene mucho que aportar.

Se discute si las técnicas precisas de la formalización y la interpretación pueden contribuir eficazmente al *descubrimiento* en la ciencia empírica. Algunos pretenden que, puesto que el descubrimiento científico —ya sea de hechos o de leyes explicativas— es, ante todo, intuitivo, o cuestión de suerte, o de ensayos y errores, los refinados instrumentos de la lógica moderna son de escasa utilidad. Otros arguyen que dichos instrumentos ayudan a descubrir tanto hechos como hipótesis, llamando la atención, por ejemplo, sobre campos de observación inexplorados y sugiriendo formas de enunciados más generales que las hipótesis aceptadas o diferentes de ellas[1]. Si algunos científicos empíricos encuentran útiles estos instrumentos, tanto mejor. Tal vez dispondríamos de unas razones más terminantes si los científicos conocieran más profundamente los métodos de la lógica moderna; en realidad, puede muy bien resultar que esta utilidad se haya exagerado algo.

Sin embargo, no cabe duda de que el método de formalización es de utilidad en tanto que ayuda a esclarecer los resultados que son fundamentales en la *metodología* de las ciencias (que hay que distinguir de su práctica): ya hemos señalado este punto anteriormente. Los estudios contemporáneos de la metodología científica tratan, sobre todo, de la sintaxis y la semántica del lenguaje de la ciencia. Se han llevado a cabo algunos importantes estudios acerca de la formalización del lenguaje de las ciencias (con fines metodológicos), y de la explicación de conceptos fundamentales comunes a las distintas ciencias; basta con mencionar a modo de ejemplos algunos trabajos sobre la estructura lingüística de la mecánica newtoniana, sobre la teoría de la relatividad, sobre los fundamentos de la lógica inductiva y de la probabilidad, sobre la teoría de la medición, sobre la teoría del comportamiento en el aprendizaje de memoria y sobre la explicación de algunos conceptos básicos de algunas ramas de la biología [2]. No es ésta la ocasión de examinar ninguno de ellos detalladamente: lo único que deseamos señalar aquí es que la formalización *qua* formalización es de fundamental importancia para la metodología de las ciencias, aun cuando no lo sea para su práctica real.

---

[1] Véase el ensayo de WOODGER, «Mathematical Logic as a Tool of Analysis».

[2] Véanse, p. ej., J. C. C. MACKINSEY, J. SUGAR y P. SUPPES, «Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics», *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2 (1953); H. REICHENBACH, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre* (Braunschweig, 1924); R. CARNAP, *Logical Foundations of Probability* (University of Chicago Press, Chicago, 1950); CLARK HULL, F. B. FITCH, *et al.*, *Mathematico-Deductive Theory of Rote Learning* (Yale University Press, New Haven, 1940; y J. H. WOODGER, *The Axiomatic Method in Biology* y *Biology and Language*. Véanse también CARL G. HEMPEL, *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science (International Encyclopedia of Unified Science*, vol. II, núm. 7, University of Chicago Press, Chicago, 1952) y R. CARNAP, *Foundations of Logic and Mathematics*, *ibíd.* (vol. I, núm. 3: 1939).

Hemos apuntado más arriba que la formalización en cuanto tal tiene también mucho que aportar a los procedimientos del análisis filosófico. Este trata, directa o indirectamente, de la explicación y el esclarecimiento de (o de las relaciones entre) nociones, conceptos o principios que se hallan en las diversas ciencias o en el discurso acerca de la experiencia, la literatura, el arte, la religión, la historia, etc. Explicar o analizar cuidadosamente un concepto o principio es incorporar un elemento que le corresponda con precisión a una teoría rigurosamente estructurada. (Véase, más adelante, el § E.) Siempre que hablamos de una *teoría* o *sistema* filosóficos nos estamos refiriendo directa o indirectamente o, al menos, así lo parece, a un lenguaje formalizado, esté o no formulado explícitamente tal lenguaje.

Por supuesto, con frecuencia hay que hacer un trabajo preliminar muy penoso antes de poder formalizar adecuadamente los resultados de un análisis filosófico. Muchas veces sólo se consigue una formalización aproximada, o a lo sumo de sólo una parte muy reducida del análisis proyectado. En este caso sólo puede llevarse a cabo una formalización *parcial.*

Distingamos entre un *lenguaje completamente formalizado* y un *lenguaje parcialmente formalizado.* En los §§ A-B hemos indicado siete apartados que establecían un lenguaje completamente formalizado, de los cuales sólo cuatro se requieren para formalizar un lenguaje parcialmente. Si exigimos sólo

(i) el vocabulario primitivo,
(ii) una definición de 'fórmula' (y quizá de 'término'),
(vi) algunas definiciones o abreviaciones

y

(vii) reglas semánticas,

el resultado es, evidentemente, un lenguaje, en el sentido de que constituye un instrumento mediante el cual es posible la comunicación. Pero está sólo parcialmente formalizado, debido a la ausencia en él de axiomas, reglas de deducción y teoremas. El carácter de la lógica subyacente puede estar especificado o no (véase el capítulo II); si lo está, quedan determinados los axiomas y reglas *lógicos*, y con ellos los teoremas. Pero un sistema lingüístico completamente formalizado ha de contener, igualmente, una especificación de los axiomas y reglas *no lógicos.*

Cuando hablamos de la importancia para el análisis filosófico de los lenguajes formalizados, incluimos también los parcialmente formalizados. Al mismo tiempo hemos de reconocer que estos últimos no son sino pasos o etapas hacia lenguajes completamente formalizados, y que nuestro objetivo como teóricos de la filosofía se alcanza sólo en parte si no se especifican por completo los axiomas y reglas no lógicos. Los axiomas y las definiciones se hallan estrechamente entrelazados: un ligero cambio en uno de ellos ocasiona a veces un cambio fundamental en otro; por lo tanto, es sumamente conveniente dar las reglas y los axiomas, lógicos y no lógicos, siempre que sea posible. Pero la dificultad que presenta llevar a cabo esto hace que hayamos de contentarnos, muchas veces, con formalizaciones sólo parciales.

Los lenguajes parcialmente formalizados son de especial interés en

aquellos terrenos que no se han desarrollado ampliamente o que tratan, hablando en general, de un asunto vago o impreciso. Los lenguajes formalizados que tratan de asuntos precisos y claramente delimitados, como en matemáticas, tienen quizá (como hemos visto) poco interés para el científico activo; pero cuando el asunto carece de la tajante y precisa simplicidad que tiene en la matemática, entonces pueden ser una verdadera ayuda para el teórico que lo estudia: el uso de un vocabulario bien determinado puede facilitar la ordenación y clasificación del asunto estudiado; quizá haya que tomar decisiones arbitrarias acerca de la extensión o el grado de algún que otro término; tal vez presente grandes dificultades la caracterización exacta de las proposiciones que se autorizan, etcétera; pero, aun cuando nuestro análisis no dé otro resultado neto que un lenguaje parcialmente formalizado, habremos dado un importante paso hacia adelante.

Como ejemplos de lenguajes parcial o completamente formalizados de destacado interés filosófico, podemos mencionar los metalenguajes (de Tarski y Carnap) que contienen un concepto semántico de verdad, los sistemas que explican los conceptos de necesidad y analiticidad o verdad lógica, los referentes al concepto de grado de confirmación o de apoyo en pruebas y los referentes al análisis de cualidades y de sus relaciones con la experiencia y con objetos físicos [1]. Podemos citar también otros lenguajes más antiguos, como el de *Principia Mathematica* o el de la teoría zermeliana de conjuntos, que proporcionan teorías referentes a conceptos tan importantes desde el punto de vista filosófico como los de número, continuidad, infinito y otros.

E. Explicación y reconstrucción racional

Muchos sistemas lingüísticos filosóficos importantes han sido formulados por filósofos afines al empirismo lógico. Los empiristas lógicos dicen con frecuencia que su trabajo proporciona una *explicación* o una *reconstrucción racional* de un concepto o principio, o de un terreno dado de conocimientos. «La tarea de la explicación —dice Carnap— consiste en transformar un concepto dado más o menos inexacto en un concepto exacto o, mejor, en sustituir el primero por el segundo». El concepto inexacto «puede pertenecer al lenguaje cotidiano o a una etapa anterior del desarrollo del lenguaje científico». Por otra parte, el nuevo concepto, más exacto, «ha de darse mediante reglas explícitas para su uso; por ejemplo, mediante una definición que lo incorpore a un sistema de conceptos científicos, ya sean lógico-matemáticos o empíricos» [2].

[1] Véanse, p. ej., A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, *Studia Philosophica*, I (1936), pp. 261-405; R. Carnap, *Meaning and Necessity* (University of Chicago Press, Chicago, 1947) y «Modalities and Quantification», *The Journal of Symbolic Logic*, 11 (1946), pp. 33-64; F. B. Fitch, *Symbolic Logic An Introduction* (The Ronald Press, New York, 1952), pp. 64-80 y 164-6; R. Carnap, *Logical Foundations of Probability* y *Der logische Aufbau der Welt* (Weltkreis-Verlag, Berlin-Schlachtensee, 1928) y N. Goodman, *The Structure of Appearance* (Harvard University Press, Cambridge, 1951).

[2] R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, p. 3.

Gran parte de la tarea de la filosofía sistemática consiste en dar una explicación en este sentido de diversos conceptos, es decir, no sólo un cuidadoso análisis lógico del concepto más antiguo, sino también la incorporación del nuevo dentro de una rigurosa estructura sistemática; esta última no es otra que un sistema lingüístico formalizado, sin el cual no puede tener lugar una auténtica explicación.

Tendríamos que distinguir cuidadosamente, en el empirismo lógico, las facetas *lógicas* de las *empiristas*, pues hasta cierto punto son independientes entre sí. Se puede, sin duda, proporcionar una explicación a determinados conceptos en términos no empiristas: el concepto semántico de verdad, por ejemplo, no parece depender de la tesis empirista, aunque tampoco la contradice en modo alguno. El hecho es que proporcionar una explicación, en el sentido de Carnap, es usar fundamentalmente los procedimientos de la lógica o de la formalización. Pero el que la explicación sea de tipo empirista depende de consideraciones ulteriores; en rigor, la explicación no supone una posición empirista o antiempirista, aunque tal vez algunos conceptos sólo puedan explicarse adecuadamente en términos que satisfagan las exigencias empiristas, mientras que otros quizá no dependan en modo alguno de estas exigencias.

El método de la explicación, que implica una formalización que incluye la interpretación, tiene sin duda una aplicabilidad potencial mucho más amplia de la que suele reconocérsele y no es en absoluto propiedad exclusiva de ninguna escuela filosófica. Tal vez esté todo el mundo de acuerdo de que la explicación en este sentido neutral es una de las tareas importantes que debe proponerse la filosofía. En el apartado anterior ya hemos sugerido que es éste el caso; si efectivamente es así, la formalización y la interpretación demostrarán su importancia para la metafísica, la ética, la estética, la teología, la filosofía de la historia [1], etc., sean éstas de carácter empirista o antiempirista. Estos métodos, como la lógica misma, parecen neutrales con relación a las conclusiones filosóficas opuestas: tratan de asuntos que hay que resolver de un modo satisfactorio antes de entrar en construcciones filosóficas o metodológicas específicas.

F. Paradojas, lenguaje natural y aproximación

Se pretende a veces que un lenguaje natural, como el inglés, es incoherente debido a la presencia en él de paradojas o antinomias. En los últimos años han surgido dos tipos de paradojas, las *lógicas* y las llamadas *semánticas* o *epistemológicas* [2]. Entre las paradojas lógicas se cuentan, por ejemplo, las de Russell y Burali-Forti. (Véase (VI, C).) Algunos sostienen que el lenguaje natural es incoherente debido a la presencia en él de la paradoja de Russell y de otras. Pero establecer esto de un modo

[1] Véase, p. ej., P. Schrecker, *Work and History, An Essay in the Structure of Civilization* (Princeton University Press, Princeton, 1948), que puede estudiarse con provecho en relación con este punto.

[2] Véase, p. ej., F. P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics* (Kegan Paul, London, 1931).

definitivo presentaría inmensas dificultades, por una razón: presupondría una formalización al menos parcial del lenguaje natural de que se tratara.

Algunos piensan que puede mantenerse con más seguridad que el lenguaje natural contiene al menos algunas de las paradojas semánticas. Estas difieren de las lógicas en que incluyen esencialmente de un modo u otro las palabras 'designa', 'nombra', 'es verdadero' u otras análogas. Por ejemplo, una forma de la llamada *paradoja de Epiménides* (atribuida a Eubúlides) se desarrolla aproximadamente del modo siguiente. Supongamos que alguien dice:

(1) 'Esta proposición no es verdadera' [1],

en donde 'esta proposición' se refiere a la misma proposición (1). Se presume que la propia (1) es una proposición y por ello verdadera o falsa. Supongamos que es verdadera: entonces lo que dice acontece de hecho, luego no es verdadera. Por otra parte, supongamos que (1) es falsa: entonces lo que dice no acontece, luego es verdadera. La proposición (1) es, pues, verdadera si y sólo si no es verdadera, lo cual es contradictorio. Se admite que (1) es una proposición legítima del castellano natural y que las diversas leyes usadas (tácitamente) aquí al desarrollar la contradicción son leyes aceptables dentro de este idioma. Pocas dudas pueden caber, si estos supuestos son correctos y si el razonamiento corresponde plenamente a los hechos, de que el castellano natural contiene esta antinomia semántica y, por tanto, es contradictorio.

No es esencial aquí tomar un partido u otro acerca de la coherencia del lenguaje natural. Como ya hemos sugerido, tal vez no pueda establecerse esta conclusión definitivamente hasta que se sepa mucho más acerca de la estructura sintáctica y semántica precisa que implica. El análisis de la denotación y del significado en los lenguajes naturales presenta problemas de gran dificultad, que no pueden resolverse por métodos casuales: la formulación precisa de estos problemas, dejando a un lado su solución, requiere posiblemente el desarrollo de cuidadosos métodos empíricos de análisis. Sin duda la lingüística empírica habrá de contribuir mucho a este desarrollo [2] y quizá también los estudios sociales y psicológicos acerca del comportamiento y las reacciones lingüísticas.

---

[1] El autor emplea aquí la palabra '*sentence*' (traducida por 'proposición'), que a veces se reserva como término técnico para (determinado tipo de) fórmulas del cálculo lingüístico formalizado sin interpretar, es decir, en un plano puramente sintáctico, previo a toda determinación semántica (esta misma palabra es la que se utiliza en este libro justamente en el sentido que acabamos de indicar). Pero aunque en el caso presente (y en otros lugares: p. ej., en el segundo párrafo del capítulo V, § D) designa, sin duda alguna, una auténtica proposición (es decir, la emplea para —determinado tipo de— fórmulas interpretadas), como, por otra parte, no utiliza la contraposición *sentence-proposition* (pues no recurre a esta última palabra, salvo en algún caso aislado, p. ej. en la pág. 106, en que hemos vertido 'proposition' por 'enunciado'), hemos traducido en toda la obra 'sentence' por 'proposición', que conduce a expresiones más habituales en castellano que las formadas a partir de la versión de 'sentence' (cuya traducción, por lo demás, difícilmente es satisfactoria) *(N. de los T.)*.

[2] Véase, p. ej., Z. HARRIS, *Methods in Structural Linguistics* (University of Chicago Press, Chicago, 1951). También C. MORRIS, *Foundations of the Theory of Signs (International Encyclopedia of Unified Science*, vol. I, núm. 2, University of Chicago Press Chicago, 1938), y *Signs, Language and Behavior* (Prentice-Hall, New York, 1946).

Entre tanto, ha de hallarse una importante aproximación a los problemas de la denotación y del significado en el lenguaje natural, que suelen descuidar sus investigadores, en el estudio de los lenguajes formalizados de poder expresivo creciente. Podemos llamar a este método la consideración *aproximada* o *abstracta* del lenguaje natural.

En toda investigación exacta, por ejemplo, al desarrollar una teoría sobre un asunto dado, se abstrae, por así decirlo, de su complejidad total: se separan algunos rasgos para su estudio explícito y al separar estos rasgos hay que descuidar otros. Pero con este descuido restringimos el asunto tratado de tal forma que puede someterse con más facilidad a una caracterización exacta. Semejante abstracción es quizá algo esencialmente concomitante al pensamiento sistemático.

Carnap ha señalado recientemente la importancia de la abstracción en el estudio de determinados problemas de la metodología de las ciencias. «...[M]ediante la abstracción que operamos a fin de construir nuestro sistema... —dice— desatendemos algunos rasgos. ...Algunos filósofos dicen que, debido a la abstracción que conduce a la lógica o, de un modo similar, a la física cuantitativa, algunos aspectos de la realidad (como, por ejemplo, las 'cualidades genuinas' o 'qualia') permanecen para siempre fuera de nuestra comprensión. No estoy de acuerdo con este criterio.» Y continúa: «...Esto puede aclararse mediante la analogía siguiente. Supongamos que se da un área circular y que deseamos cubrir parte de ella con cuadriláteros que tracemos dentro del círculo y que no se solapen unos con otros. Esto puede hacerse de muchas maneras diferentes; pero, cualquiera que sea la adoptada y por mucho que avancemos en esta operación (finita), nunca lograremos cubrir toda el área circular. Sin embargo, no es cierto que —en analogía con el punto de vista filosófico citado— exista punto alguno del área que no pueda cubrirse. Por el contrario, para todo punto e inluso para todo número finito de puntos, existe un conjunto finito de cuadriláteros que los cubren todos. La abstracción provoca una situación análoga. En toda construcción de un sistema de lógica o, en otras palabras, de un sistema lingüístico con reglas [sintácticas y semánticas] exactas, algo se sacrifica, no se capta, debido a la abstracción o esquematización que implica. Sin embargo, no es cierto que exista algo que no pueda ser captado por un sistema lingüístico, escapando así a la lógica. Para un solo hecho del mundo puede construirse un sistema lingüístico capaz de representar este hecho sin comprender ningún otro...» [1].

«Algunos científicos y filósofos —indica Carnap— sienten una fuerte aversión a toda abstracción o esquematización. Piden que todo análisis de la ciencia metodológico o incluso lógico nunca pierda de vista el comportamiento real de los científicos en el laboratorio y ante la mesa de trabajo. Nos previenen del peligro de desatender algunos de los factores que un buen científico toma en consideración al descubir y comprobar sus hipótesis... Pienso que este criterio contiene una idea acertada e importante. Siempre que valoramos una abstracción deberíamos ciertamente tener plena conciencia de lo que hacemos y no olvidar que

[1] R. CARNAP, *Logical Foundations of Probability*, p. 210.

dejamos a un lado ciertos rasgos de los procesos reales y que estos rasgos de los que hacemos abstracción de momento no deben pasarse por alto completamente, pues hay que situarlos correctamente en determinado punto de la investigación científica total. Por otra parte, algunos autores, al exagerar esta exigencia válida haciendo de ella una repulsa total de toda esquematización y abstracción..., privan a la ciencia de algunos de sus métodos más fructíferos.»

«La historia de la ciencia está llena de ejemplos de la utilidad e inmensa fertilidad de las abstracciones. Uno de los ejemplos más sobresalientes es la geometría. Fue creada por un acto de abstracción: se prestó atención a las propiedades y relaciones espaciales de los cuerpos, desatendiendo todas las otras propiedades de color, substancia, peso, etcétera. Luego se dio otro paso audaz que condujo del mundo de los objetos concretos con sus propiedades directamente observables a un esquema compuesto de elementos construidos: la geometría se transformó en una teoría de determinadas configuraciones espaciales, cuyas propiedades están determinadas completa y exactamente. Esta geometría no trata ya de bolas de madera o hierro, sino de esferas, esferas perfectas a las cuales las bolas se aproximan de un modo más o menos grosero. Trata de líneas rectas infinitas, algunos segmentos finitos de las cuales están representados aproximadamente, en el mejor de los casos, por ciertos hilos y aristas de cuerpos... Hoy en día es evidente que el magnífico desarrollo de la geometría a través de su historia de más de dos mil años hubiera sido imposible sin estas abstracciones y que el desarrollo de la física hubiera sido imposible sin el de la geometría. El resultado final es, pues, que no sólo desde el punto de vista del matemático, sino también desde el del físico, las abstracciones en geometría son enormemente útiles e incluso prácticamente indispensables. Aunque la finalidad sigue siendo la investigación, no de las configuraciones abstractas, sino de las propiedades espaciales observables de los objetos concretos, sin embargo resulta que la geometría abstracta proporciona el método más eficaz para esta investigación, mucho más eficaz que cualquier método que trate directamente de propiedades espaciales observables. Otros numerosos métodos de abstracción o esquematización han demostrado ser fructíferos en la física. Esto hace ver que si deseamos obtener un conocimiento de los objetos y sucesos de nuestro alrededor como ayuda para nuestras decisiones en la vida práctica, entonces el rodeo que, partiendo de estos objetos, conduce primero a un esquema abstracto, puede a la larga ser mejor que el camino directo que permanece cerca de los objetos y de sus propiedades observables» [1].

Nos hemos extendido tanto en la cita de las sólidas observaciones de Carnap porque proporcionan en esbozo un argumento en pro de la consideración aproximada del lenguaje natural. Esta consideración supone que el mejor modo de acercarse al poder expresivo del lenguaje natural es por medio de lenguajes formalizados *construidos con fines científicos, metodológicos o filosóficos explícitos*. Hemos llamado a esta consideración

[1] R. Carnap, *ibíd.*, pp. 215-17.

a la vez 'abstracta' y 'aproximada'. Podemos empezar nuestra investigación con un lenguaje natural e ir tallándolo, por así decirlo, con fines metodológicos específicos; también podemos partir de lenguajes formalizados muy limitados y construir sistemas de mayor complejidad cada vez: ambos métodos dan esencialmente el mismo resultado final. El lenguaje formalizado resultante puede no contener más que una pequeña parte del poder expresivo de un lenguaje natural; pero toda parte teórica de un lenguaje natural puede representarse de este modo por algún sistema formalizado: cada lenguaje formalizado está así contenido, verosímilmente, en el lenguaje natural. Un análisis exacto de la denotación y de la verdad, del tipo que vamos a presentar en este libro para lenguajes formalizados, debería estar contenido, por tanto, en todo análisis adecuado de los conceptos equivalentes para el lenguaje natural.

En resumen: en el § C hemos dado cerca de diecisiete razones de por qué se piensa que los lenguajes formalizados son importantes para el análisis filosófico y la metodología. (1) Con los procedimientos de formalización se consiguen una claridad y una precisión que quizá no puedan lograrse de otro modo. El uso de los lenguajes formalizados proporciona (2) una ayuda a la intuición, (3) una corrección del pensamiento defectuoso y (4) un método sistemático de criticar las ideas oscuras. (5) Un lenguaje formalizado ayuda a asegurarse de que todos los supuestos en un contexto dado están explícitamente establecidos. (6) Estos lenguajes nos permiten educir de un modo sistemático las consecuencias de nuestros supuestos. Por referencia a los sistemas lingüísticos formalizados podemos hacer las importantes distinciones entre, (7) metalenguaje y lenguaje objeto y (8) sintaxis y semántica. (9) Puede establecerse una interpretación explícita de sus símbolos primitivos. (10) Los lenguajes formalizados proporcionan una base para el estudio de las propiedades metateóricas, para la comparación de teorías, para la reducción de una teoría a otra, etc. Sólo de ellos puede decirse que son, (11) coherentes, o (12) completos, en el sentido más extricto de estas palabras. (13) El uso de definiciones claras, de axiomas cuidadosamente establecidos y de teoremas explícitamente demostrados crea un orden correspondiente en nuestras ideas y afirmaciones, que es (14) pedagógicamente útil por facilitar el aprendizaje. (15) El empleo de lenguajes formalizados nos permite caracterizar explícitamente la estructura lógica de una ciencia o de otra disciplina ampliamente desarrollada; aquéllos (16) nos proporcionan instrumentos precisos de comunicación y (17) constituyen una especie de ideal al que aspira el pensamiento sistemático. Aparecen otras razones cuando consideramos (18) el papel de la explicación o reconstrucción racional, (19) la posible presencia de paradojas en el lenguaje natural, (20) la necesidad de la abstracción en todo discurso exacto y (21) la posibilidad de aproximarse al poder expresivo del lenguaje natural, con fines científicos, metodológicos o filosóficos específicos, por medio de los lenguajes formalizados. Estos veintiún argumentos no son todos independientes entre sí, ni tampoco son en modo alguno exhaustivos. Muchos de ellos son también

probablemente algo toscos y necesitan una elaboración más completa de la que aquí puede darse [1].

G. Núcleo mínimo de teoría semántica

Podemos ahora enunciar el objetivo primordial de este libro: proporcionar métodos de interpretación de los sistemas logísticos formalizados, de los modos —a nuestro parecer— más simples y económicos posibles.

Dado un sistema logístico formalizado, existen varios métodos de establecer una interpretación suya, que han sido estudiados cuidadosamente a través de la bibliografía de la lógica moderna. Todos estos métodos están bastante desarrollados y emplean fundamentalmente medios lógicos y matemáticos de gran complejidad; asimismo, suelen tener posibilidades de aplicación algo restringidas, por ser adecuados, ante todo, para el análisis semántico de determinado lenguaje objeto o de lenguajes objeto de determinado tipo (quizá muy limitado).

Aquí nos ocuparemos, sobre todo, de métodos semánticos de suma simplicidad y de muy amplia generalidad. Desarrollaremos diversos métodos posibles, algunos de los cuales serán preferibles a otros en ciertos aspectos; estos métodos parecerán particularmente simples y directos cuando se comparen con otras formulaciones de la semántica. No es necesario admitir complicados supuestos por medio de axiomas o reglas: la semántica se incluye en lenguajes de tipo muy sencillo y los únicos conceptos matemáticos empleados son (poco más o menos) los de la aritmética elemental. Los métodos que aquí empleamos son también sumamente generales, aplicables de hecho a todos los lenguajes objeto de primer orden. La mayor parte de los lenguajes formalizados importantes que se han establecido son directamente de primer orden o pueden formularse rápidamente de nuevo como tales; los métodos aquí desarrollados son, por ello, aplicables a casi todos los lenguajes formalizados.

Formularemos en este libro una especie de núcleo *mínimo* de teoría semántica basada en la denotación. Para ello daremos definiciones de lo que se entiende por 'semántica' y por 'mínimo' y puede ser que la adecuación de estas definiciones no se admita inmediatamente; sin embargo, aduciremos en su favor razones convincentes y demostraremos que algunas de las teorías semánticas formuladas son mínimas en el sentido

---

[1] Para evitar interpretaciones equivocadas, debemos indicar que, en relación con los argumentos acerca de la importancia de la formalización para la filosofía, hemos estado hablando principalmente de *sistemas* filosóficos. Los *razonamientos* filosóficos pueden, a veces, estar incluidos en sistemas filosóficos, pero no siempre lo están. Los razonamientos suelen estar, aunque no siempre, al nivel metalingüístico y frecuentemente utilizan proposiciones que no son declarativas. Semejantes razonamientos no pueden ser formalizados en el sentido que tratamos aquí sobre la base de los conocimientos actuales. Ver, p. ej., G. Ryle, *Philosophical Arguments* (Inaugural Lecture, Oxford University Press, Oxford, 1945) y *Dilemmas* (Cambrigde University Press, Cambridge, 1954), capítulo VII.

definido. Es claro que las primeras teorías que presentaremos no son mínimas, por estar basadas esencialmente en los métodos tradicionales.

Las diversas teorías semánticas que vamos a formular tienen la importante propiedad de ser coherentes con relación a los supuestos de la sintaxis subyacente del lenguaje objeto. Así, los métodos semánticos que empleamos son seguros en tanto que no contienen contradicciones, a no ser que las contengan la sintaxis subyacente o el lenguaje objeto. Debido a la posible presencia de paradojas semánticas en los lenguajes naturales y a la posibilidad de que éstas reaparezcan en cualquier lenguaje que contenga ingredientes semánticos, la coherencia relativa de los métodos desarrollados reviste quizá un interés especial.

Este núcleo mínimo de teoría semántica comprende como parte suya un tipo restringido de sintaxis. Puede pensarse que este conjunto de sintaxis y semántica constituye una especie de doctrina lingüística mínima acerca de la cual podría caber un acuerdo muy amplio. No parece que otros tipos de semántica basada en la denotación —que utilicen medios de deducción lógicos más poderosos y conceptos más complicados— proporcionen una base para semejante acuerdo, por una razón: podría ponerse en duda su coherencia relativa; otra razón es que podrían no admitirse los complejos supuestos necesarios. Pero los supuestos que aquí admitimos son tan restringidos, que incluso filósofos y metodólogos de muy diferentes escuelas pueden quizá estar de acuerdo con ellos; o, al menos, esta porción de doctrina lingüística podría considerarse —por lo que hemos dicho— un prolegómeno necesario a todos los análisis sistemáticos, filosóficos o metodológicos.

H. Sumario

Podemos resumir muy brevemente el contenido básico de este libro como sigue:

Una importante característica de la mayoría de las teorías que hemos de presentar es que las expresiones denotadoras se toman en un sentido que parece esencialmente el mismo que ya les daba Hobbes. «De lo nombres —según éste— algunos son *propios* y hacen referencia singular a un solo objeto, como *Pedro*, *Juan*..., y otros son *comunes* a varios objetos, como *hombre*, *caballo*, *árbol*, cada uno de los cuales, aunque un solo nombre, es, sin embargo, el nombre de diversos objetos particulares...»[1]. De acuerdo con esto, los nombres o expresiones denotadoras pueden ser propios o comunes, esto es, pueden denotar o representar un solo objeto concreto, o bien pueden representar a la vez a cada uno de los objetos de una multitud. Lo que da a entender Hobbes reaparece con frecuencia en las obras lógicas británicas; se hallará en los libros de Mill, J. N. Keynes, Jevons, y otros. Este sentido es algo más amplio que el habitual hoy en día en las obras filosóficas, lógicas y semánticas: los nombres comunes o expresiones denotadoras se llaman ahora casi universalmente 'predicados' y 'nombre' se usa exclusivamente

[1] Th. Hobbes, *Leviathan*, edición de Cambridge, 1904, p. 15.

en el sentido de 'nombre propio'; esta terminología se ha hecho habitual, en parte, sin duda, porque es la de Russell y Carnap.

Pero existen también otras razones por las cuales 'nombre' ha llegado a emplearse como sinónimo de 'nombre propio'. Estas parecen girar alrededor de un supuesto básico que ha dominado el pensamiento semántico durante los dos o tres siglos últimos; Carnap lo ha llamado el *Principio de univocidad.* (Carnap no invoca necesariamente este principio por sí mismo; pero parece haber sido el primero en formularlo con claridad y en darse cuenta del importante papel que ha desempeñado.) El Principio de univocidad establece aproximadamente que cada expresión denotadora en un lenguaje dado denota exactamente una entidad: luego ser un nombre es ser un nombre propio, ya sea el nombre de un individuo, clase, propiedad, función, valor de verdad o proposición. Los nombres que denotan más de un objeto de cualquier género en rigor no son nombres en absoluto.

El Principio de univocidad ha desempeñado históricamente un papel importante. Una característica destacada de muchas de las teorías semánticas que vamos a desarrollar aquí es, sin embargo, la no admisión de este principio, de forma que se permite a las expresiones o frases denotadoras representar a la vez más de un objeto. Pero, por supuesto, pueden también admitirse si se quiere nombres propios, que denotan un solo objeto. Los nombres propios y las expresiones que denotan más de un objeto tienen muchas propiedades semánticas en común y tal vez se hallen aquí más estrechamente relacionados conceptualmente que dentro de una semántica que emplee un principio de univocidad; no obstante, emplearemos 'nombre' exclusivamente en el sentido de 'nombre propio': este empleo está actualmente tan establecido que poco podría ganarse al extenderlo para que incluya nombres comunes.

La lógica subyacente que usaremos en todo este libro es del tipo que suele llamarse *lógica de primer orden*, la cual comprende sólo las teorías de las funciones veritativas, de los cuantificadores y posiblemente de la identidad, que son las más elementales de la lógica moderna (clásica, bivalente). A fin de que el libro sea completo, expondremos en el próximo capítulo la lógica de primer orden necesaria: la formulación que adoptamos es en lo esencial la de los *Principia Mathematica* en la forma debida a Church. Todos los sistemas lingüísticos que estudiaremos con algún detalle, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes sintácticos o semánticos, son, en la terminología de Church, cálculos funcionales *simples*, *aplicados*, de primer orden con o sin inclusión de la identidad.

La semática presupone la sintaxis y la contiene como parte. Como proemio a la semántica de primer orden, necesitaremos, por tanto, una sintaxis de primer orden, que ocupará el capítulo III. El tipo de formulación que damos se debe a Chwistek, Tarski y Quine.

El estudio de la semántica propiamente dicha empieza en el capítulo IV. La primera teoría semántica que hemos de presentar está basada en una relación llamada *denotación múltiple;* ésta se distingue de la denotación singular de un modo semejante a como se distinguen las expresiones denotadoras comunes de los nombres propios: una expre-

sión denotadora (nombre) común es soporte de la relación de denotación múltiple para (o denota a la vez) los objetos a los cuales se aplica. A base de la denotación múltiple pueden definirse los otros conceptos y relaciones básicos de la semántica, incluyendo un concepto semántico de verdad. En el capítulo IV se dan las definiciones de varios conceptos semánticos junto con las Reglas de denotación, esto es, con las reglas semánticas que estipulan las propiedades de la denotación múltiple.

En el capítulo V se dan diversas definiciones posibles de 'verdad' y se demuestra su *adecuación* (esencialmente en el sentido de Tarski). También se exponen los importantes usos del concepto semántico de verdad en relación con la coherencia y la decidibilidad. Se da una demostración de la coherencia relativa del metalenguaje semántico basado en la denotación múltiple, en el supuesto de que los axiomas sintácticos junto con los del lenguaje objeto sean coherentes. Por último, llevamos a cabo un breve examen de las antinomias semánticas y de cómo y por qué el metalenguaje semántico estudiado no puede contener su propio concepto de verdad de un modo coherente.

Con frecuencia las formulaciones de la semántica basada en la denotación son tales que no proporcionan directamente una definición de verdad para sistemas lingüísticos de tan gran alcance como los basados en la teoría de tipos simplificada o en la teoría zermeliana de conjuntos. A partir de la denotación múltiple puede darse una semántica para estos lenguajes de gran alcance de modo enteramente análogo que para los sistemas más sencillos; el capítulo VI se consagra a mostrar esto detalladamente; se hace también un examen preliminar no formalizado de estos importantes lenguajes para quienes no estén familiarizados con ellos.

En el capítulo VII se consideran tres tipos distintos de metalenguajes semánticos: uno basado en una relación de *satisfacción* muy simple, otro en una forma simple de la denotación singular o *designación* y un tercero basado en la *determinación*. La designación y la determinación son elementos primitivos particularmente apropiados para la semántica de lenguajes objeto basados en la teoría de tipos.

Los diversos metalenguajes semánticos de los capítulos IV-VII siguen de cerca otros metalenguajes estudiados por Tarski y Carnap.

Todos los metalenguajes semánticos que se habrán estudiado hasta este momento, incluyendo los desarrollados en los capítulos IV-VII, tienen la característica común de contener una traducción *in toto* del lenguaje objeto al cual se aplican, y por ello pueden llamarse con razón metalenguajes *traducentes*. En el capítulo VIII esbozaremos la estructura de un metalenguaje semántico *intraducente*, en el sentido de que no contiene una traducción estricta del lenguaje objeto. La semántica intraducente supone un apartamiento radical en algunos aspectos de la semántica de los capítulos anteriores, y creemos que posee considerable interés filosófico. En una formulación de tal semántica, el elemento semántico primitivo es una relación de comprensión, según la cual se dice que una constante predicativa comprende otra: por ejemplo, en un sistema formal apropiado puede decirse que 'animal' comprende

'hombre', o 'amante de la paz', o 'cuáquero'; la comprensión relaciona unas constantes predicativas con otras, mientras que la denotación múltiple y las otras relaciones semánticas antes mencionadas relacionan constantes predicado con objetos no lingüísticos. Tomando la comprensión como única relación semántica primitiva puede construirse una especie de *álgebra booleana* ampliada cuyos elementos fundamentales son constantes predicativas; el concepto semántico de verdad puede definirse fácilmente dentro de esta teoría. Se dan varias formulaciones distintas de la semántica intraducente, que conducen a una demostración de que ésta constituye una semántica *mínima* en el sentido apropiado.

En el capítulo IX se demuestran varios teoremas de la semántica intraducente. Se hace ver que, bajo ciertas hipótesis, todas las proposiciones del lenguaje objeto apropiado que son teoremas son también verdaderas. Este es uno de los teoremas de la semántica más fecundos y conduce a la demostración de la coherencia del lenguaje objeto. Dentro de la semántica intraducente pueden demostrarse, bajo hipótesis adecuadas, todos los teoremas importantes que son demostrables en la semántica traducente ordinaria. Se da también una demostración de la coherencia de los axiomas de la semántica intraducente (con relación a la coherencia de los axiomes de la sintaxis subyacente a ella).

La formulación de los metalenguajes semánticos considerados se simplifica algo si los lenguajes objeto a los cuales se aplican no contienen como elementos primitivos constantes individuales (nombres propios) ni constantes funcionales (funtores). En el capítulo X se consideran las ligeras complicaciones que produce la introducción de constantes individuales o funcionales primitivas, primero en la semántica basada en la denotación múltiple y luego en la basada en la comprensión. Se muestra también que cabe formular un metalenguaje semántico intraducente de tal forma que contenga de un modo coherente su propio concepto semántico de verdad.

Una de las ventajas de los diversos metalenguajes semánticos formulados (traducentes e intraducentes) es que dan lugar, con sólo cambios secundarios, a teorías semánticas en las cuales las expresiones del lenguaje objeto pueden considerarse como *inscripciones* o *signos sucesos*, en vez de como *formas* o *signos figuras;* hasta la fecha, la semántica se había basado exclusivamente en signos figuras. Se formula en el capítulo XI una teoría inscriptiva, tomando como primitiva una relación de denotación múltiple: esta semántica es, por tanto, del tipo traducente.

En el capítulo XII se simplifica la semántica inscriptiva tomando como único elemento semántico primitivo una relación de comprensión, por lo cual esta teoría es intraducente. Creemos que una semántica intraducente basada en inscripciones da una solución al problema de lograr una teoría *nominalista* de la verdad, en el sentido muy estricto de Goodman y Quine. El capítulo XIII se dedica a algunas observaciones filosóficas generales acerca de los diversos metalenguajes semánticos formulados: se aducen varias razones de la preferencia por los lenguajes de primer orden, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes;

también se enumeran con cierto detalle las razones del interés de la semántica intraducente. El criterio filosófico general referente a los lenguajes que surge de estas consideraciones es llamado *constructivismo de primer orden;* según este criterio, los lenguajes de primer orden que tienen campos de objetos numerables como valores para las variables ofrecen especial interés filosófico.

En resumen, este libro contiene: (1) una exposición bastante completa de algunas teorías semánticas estrechamente relacionadas con las que estudiaron por primera vez Tarski y Carnap (capítulos IV-VII y algunas partes del X; los capítulos II y III son preliminares); (2) la formulación de una teoría semántica mínima de tipo intraducente, que supone una divergencia radical en algunos aspectos de las teorías semánticas desarrolladas hasta la fecha (y de las comprendidas en (1)), sobre las cuales tiene algunas importantes ventajas (capítulos VIII-IX y algunas partes del X); (3) la formulación de dos tipos de teorías semánticas, una traducente y otra intraducente, en las cuales se toman inscripciones o signos sucesos como valores para las variables representativas de expresiones (capítulos XI-XII), y (4) una argumentación acerca de la importancia—para el análisis filosófico y la metodología de la ciencia—de los sistemas lingüísticos formalizados de primer orden numerables (capítulo XIII). Se desarrolla una filosofía del lenguaje numerabilista a la par que las diversas formulaciones de la semántica.

CAPÍTULO II

Lenguajes de primer orden

Debe considerarse que las variables de todo lenguaje de primer orden, del tipo que va a ser tratado en este libro, abarcan un campo de *individuos* bien determinado y no vacío. El significado de 'individuo' se dejará por el momento sin especificar, para poder darle diferentes sentidos en las distintas interpretaciones del lenguaje. No se admitirán otros tipos de variables a fin de que los lenguajes de primer orden tengan una estructura muy sencilla y elemental: en especial, no admitiremos variables de propiedad o clase ni de relación o funcionales, ni tampoco variables proposicionales, ya que estos tipos de variables no van a ser necesarios. Las constantes primitivas son de dos tipos diferentes, lógicas y no lógicas. Las no lógicas comprenden las constantes individuales, las constantes predicativas y las constantes funcionales (funtores). Puede considerarse que las constantes individuales representan únicamente individuos concretos; se admite generalmente que las constantes del segundo tipo representan propiedades de los individuos o relaciones entre éstos: una constante predicativa con un lugar vacío *(monádica)*, una propiedad; una con dos lugares vacíos *(diádica)*, una relación diádica, etc. (se dice que una constante predicativa monádica es de grado uno, una diádica de grado dos, etc.); y, finalmente, el funtor representa funciones u operaciones que se aplican a los individuos como argumentos y que sólo tienen individuos como valores funcionales: podemos también hablar aquí de funtor monádico, funtor diádico, etcétera (un funtor monádico 'f' remplaza a una función f que, aplicada a un *argumento* x, toma el *valor funcional* fx). Las constantes lógicas admitidas deben ser tales que comprendan los *signos conectivos* 'y', 'o', 'no', etc., así como los *cuantificadores* de variables individuales (expresiones tales como 'para todo x' y 'hay al menos un x tal que').

Haremos a continuación una caracterización más precisa de los lenguajes de primer orden. La *estructura primitiva* de dichos lenguajes se bosquejará en el § A. Algunos de los teoremas fundamentales de la teoría elemental de *funciones veritativas* se darán en el § B, y los correspondientes a la *teoría de la cuantificación*, en el § C. El § D tratará de la introducción de una notación conveniente para una operación de *abstracción*. Se darán en el § E los axiomas para la teoría de la *identidad*. En el § F se desarrollarán teorías de las *descripciones singulares* y *selectivas*. Se establecerán en el § G dos o tres teoremas referentes a algunas útiles *formas normales*. El concepto de *campo de individuos*,

fundamental de un lenguaje de primer orden, será tratado en el § H con más detalle que anteriormente. Se precisará la distinción entre *lenguaje objeto* y *metalenguaje* en el § I, entre *sintaxis* y *semántica* en el § J, y entre *signos sucesos* y *signos figuras* en el § K. Se darán en el § L varios *ejemplos* de lenguajes objeto de primer orden.

A. Sistemas lógicos de primer orden [1]

Especifiquemos primero *in toto* el vocabulario primitivo. Este comprenderá las constantes lógicas (1)

'v', '~', '(' y ')',

(2) la lista infinita de variables

'x', 'x'', 'x''', ...,

y (3) una lista finita de constantes predicado

'P', 'P'', 'P''', ..., 'P''' ...''.

La constante lógica 'v' ('o') se considerará como representativa de la conexión (función veritativa) constituida por la *disyunción* inclusiva lógica, como es costumbre; la constante '~' ('no') representará la negación en el sentido habitual de la lógica clásica bivalente; y las constantes lógicas '(' y ')' no han de tomarse como símbolos de ningún tipo determinado de entidad, sino que su papel es más bien el de expresiones sincategoremáticas (o sea, contextuales) que facilitan el agrupamiento o la puntuación. Las variables son todas de un mismo tipo, y abarcan cualquier campo de individuos claramente determinado y no vacío (véase más adelante el § H); su número será infinito, de suerte que siempre podamos encontrar una nueva en caso de necesitarla. Las constantes predicado 'P', etc., pueden ser de cualquier grado finito; para mayor claridad, supongamos de momento que los lenguajes que van a estudiarse contienen sólo cinco constantes predicado primitivas, y que 'P' es de primer grado, 'P'' de segundo, etc.; esta suposición no es en absoluto esencial, pero facilitará algunas definiciones posteriores.

Podría asimismo considerarse conveniente admitir algún otro tipo de expresiones primitivas; en particular, puede quererse disponer, como tales expresiones, de constantes individuales o de funtores. Sean

'ā', 'ā'', 'ā''', ...,

[1] La formulación aquí dada es, en lo esencial, la de los *Principia Mathematica* en la forma debida a Church. Véase A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Part I (Princeton University Press, Princeton, 1944), pp. 33-98. Cf. también D. Hilbert y W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, (Springer, Berlín, 1938), (segunda edición)*; D. Hilbert y P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1 (Springer, Berlín, 1934) pp. 87-209; S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics* (Van Nostrand, New York, 1952); J. B. Rosser, *Logic for Mathematicians* (McGraw-Hill, New York, 1953) y W. V. Quine, *Mathematical Logic* (1.ª edición, Norton, New York, 1940; ed. revisada, Harvard University Press, Cambridge, 1951). Véanse también I. Copi, *Symbolic Logic* (Macmillan, New York, 1954) y H. Leblanc, *An Introduction to Deductive Logic* (Wiley, New York, 1955).

Nota añadida en la corrección de pruebas.—Ha aparecido recientemente (Princeton University Press, Princeton, 1956) una edición revisada y aumentada de la obra de Church, con el mismo título.

* Versión castellana de la 4.ª edición alemana: *Elementos de lógica teórica* (Tecnos, Madrid, 1962) *(N. de los T.)*.

constantes individuales y sean

'f', 'f'', 'f''', ...,

funtores, cada uno del grado correspondiente. Se considerará que una constante individual nombra o designa uno solo de los individuos del campo fundamental. Los funtores designarán ciertas funciones u operaciones que toman exclusivamente a los individuos como argumentos y tienen exclusivamente individuos como valores funcionales. La presencia de constantes individuales o funcionales no es esencial, y en caso de desearlo pueden ser introducidas por medio de definiciones a partir de constantes predicativas adecuadas (véase más abajo, § F); sin embargo, muchos de los lenguajes de que trataremos las contendrán y por este motivo las incluimos aquí.

Dentro de los diferentes lenguajes, las mismas constantes primitivas (no lógicas), ya sean predicativas, funcionales o individuales, pueden representar diferentes propiedades o relaciones, funciones o individuos respectivamente. Sin embargo, las constantes lógicas no representan exactamente objetos, y, por tanto, se comportan de un modo esencialmente idéntico en todos los lenguajes que estudiamos (véase más adelante VI, F).

El concepto de *término* puede ser definido por recurrencia, para los sistemas lingüísticos de que tratamos, del modo siguiente:

1. Toda variable o constante individual es un término.
2. Todo resultado de escribir un funtor n-ádico seguido de n términos es un término.

El concepto de *fórmula* puede definirse de un modo análogo, presuponiendo el de término.

1. Todo resultado de escribir una constante predicado n-ádica seguida de n términos es una fórmula.
2. Si **A** es una fórmula, '~ **A**' lo es también.
3. Si **A** y **B** son fórmulas, entonces '(**A** v **B**)' lo es también.
4. Si **A** es una fórmula y **x** es una variable, entonces '(**x**) **A**' es una fórmula.

(De aquí en adelante, sólo se entenderán por fórmulas y términos aquellas series de símbolos que explícitamente se convengan como adecuados a estas definiciones.)

Según la definición, por ejemplo,

'(P'ā*x*' v ~P''*xx*'*x*'')',

es una fórmula. Pero

'(())ā*x*''Pvv~~~'

no es una fórmula en absoluto, a pesar de ser una serie de expresiones primitivas del lenguaje. Del mismo modo, '**f**'*x*ā' es un término si '**f**' es un funtor diádico, etc.

Obsérvese que estas definiciones no formales son recurrentes en el sentido someramente descrito en (I, A): en la definición de 'fórmula', por ejemplo, la cláusula (1) define este término como aplicado a las fórmulas más simples, o sea a las atómicas; las cláusulas (2), (3) y (4) nos dicen luego que, dadas ciertas fórmulas, otras determinadas expresiones construidas a partir de ellas son también fórmulas; y de este modo se definen fórmulas de todas las longitudes finitas posibles. Ha-

blando intuitivamente, una fórmula puede ser descrita como toda expresión construida por medio de un número finito de aplicaciones de la negación, la disyunción o la cuantificación universal a partir de fórmulas atómicas. Pero no podemos definir el concepto sin haber previamente definido la noción incluida en la frase 'número finito de aplicaciones': ahora bien, al emplear definiciones recurrentes vemos que comprenden todas las fórmulas posibles, y que una definición de este tipo proporciona una especie de análisis implícito de aquella frase. (Cf. más adelante (III, D).)

En lo sucesivo se emplearán '**A**', '**B**' y '**C**', posiblemente con primas o subíndices numéricos, para representar cualquier fórmula, y '**x**', '**y**' y '**z**', con o sin primas o subíndices numéricos, para representar cualquier término. Estas letras en negrilla son variables (sintácticas) empleadas sin rigor formal para abarcar tipos determinados de expresiones del lenguaje o lenguajes que se estudian: en todo el libro las letras en negrilla se emplearán de este modo.

Cuando una letra en negrilla se encuentra en un contexto que contiene uno o varios de los símbolos primitivos del lenguaje (como en (2), (3) y (4) de la definición de 'fórmula' que acabamos de dar), las comillas se emplean en un sentido especial. Por ejemplo: no debe entenderse literalmente que (2) signifique que el resultado de escribir '~' seguida de '**A**' sea una fórmula, sino más bien que el resultado de escribir '~' seguida de **A** (o sea, de una expresión cualquiera que '**A**' abarque) es una fórmula. De un modo semejante, lo que (3) establece es que el resultado de escribir '(' seguido de **A** seguido de 'v' seguida de **B** seguida de ')' es una fórmula. Cuando las semicomillas encierran una expresión que contiene al menos una variable en negrilla y al menos una de las constantes o variables primitivas del lenguaje, tienen el efecto de lo que a veces se llama *casi-comillas (quasi-quotes)* [1]. Una expresión '(**A** v **B**)' representa, pues, la expresión que se forma llenando los huecos respectivos de

'(v)'

con las expresiones **A** y **B**. Asimismo, '(**x**)**A**' representa la expresión formada a partir de

'( ) '

llenando el primer hueco con la variable **x** y el segundo con la fórmula **A**. Si una expresión no contiene letras en negrilla y está comprendida entre semicomillas, éstas están empleadas en su sentido usual [2]. Aunque en lo sucesivo emplearemos las semicomillas en ambos sentidos, no hay posible confusión. Si el contexto simbólico comprendido entre comillas contiene al menos un símbolo primitivo del lenguaje y al menos una letra en negrilla, las comillas están siendo usadas en el sentido del casi-entrecomillado *(quasi-quotation)*; pero si no contiene ninguna letra en negrilla, entonces las comillas tienen su sentido normal [3]. (Obsérvese que si una letra en negrilla se encuentra aislada en

[1] También llamadas con frecuencia comillas semánticas. *(N. de los T.).*

[2] Es decir, el de mencionar lo entrecomillado sin usar su valor de signo. *(N. de los T.)*

[3] El empleo de las letras en negrilla como variables sintácticas, como se hace aquí y en todo el libro, se debe a CHURCH. Véase, p. ej., su *The Calculi of Lambda-Conversion*

un contexto verbal y no está entre comillas, el contexto está dentro de un metalenguaje; si está entre comillas, el contexto está dentro de un meta-metalenguaje. Véase más adelante el § I.)

Antes de dar los axiomas y reglas de un lenguaje, es conveniente introducir algunas abreviaturas y definiciones. Sean, por tanto,

D1. '(A ⊃ B)' abreviatura de '(~ A v B)',

D2. '(A . B)' abreviatura de '~(~A v ~B)',

D3. '(A ≡ B)' abreviatura de '((A ⊃ B) . (B ⊃ A))',

y

D4. '(Ex)' abreviatura de '~(x)~', en donde x es una variable. Es fácil mostrar que los símbolos así introducidos guardan sus significados habituales. El '⊃' representa la conexión (función veritativa) del *condicional material*, el '.' la *conyunción lógica*, y '≡' la *equivalencia material*, todos estos conceptos entendidos en el sentido habitual de la lógica bivalente de funciones veritativas.

Como es evidente a partir de la definición de 'fórmula' que dimos anteriormente, la cuantificación universal se expresa mediante '(x)' —en que x es una variable—debidamente prefijado a una fórmula. La fórmula '(*x*)(P*x* v ~P*x*')', por ejemplo, puede leerse 'Para todos los individuos *x*, *x* tiene la propiedad P o no es el caso que *x* tenga P'. Observamos luego que *D4* introduce una notación para la *cuantificación existencial*. '(E*x*) .....' puede leerse 'Existe al menos un *x* tal que .....'. Esto es una lectura abreviada de 'No es el caso que para todo *x*, no sea el caso que .....'. (En lugar de '.....' podemos poner aquí cualquier fórmula del lenguaje.)

Usaremos el signo compuesto de Frege '⊢' (de aserción veritativa), al hablar sobre el lenguaje, para representar 'es un teorema' [1]. '⊢ A' debe leerse 'la fórmula A es un teorema'. '⊢' absorberá las semicomillas que encierren cualquier contexto simbólico al que preceda este signo, contenga o no letras en negrilla. Así, '⊢ (A v B)' debe leerse ' '(A v B)' es un teorema', y '⊢ P*x*', ' 'P*x*' es un teorema'.

Más que citar axiomas o postulados directamente, lo que hacemos ahora es presentar enunciados generales sobre el lenguaje que establecen que toda fórmula (del lenguaje) de tal y cual forma es un axioma. Todos los enunciados generales de este tipo son *metaaxiomas*. Un axioma es, pues, toda fórmula del lenguaje estipulada por uno de los metaaxiomas. Y éstos son un tipo especial de *reglas*. (Véase, más adelante, el § B.)

Los cuatro primeros metaaxiomas especifican los *Axiomas de las funciones veritativas*.

(Princeton University Press, Princeton, 1941). La idea del casi-entrecomillado proviene de Quine. Véanse, p. ej., su «Logic Based on Inclusion and Abstraction», *The Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), pp. 145-52, y *Mathematical Logic*, pp. 33-7.

[1] Véase G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* (vol. I, Jena, 1893).

R1. $\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \supset \mathbf{A}$.
R2. $\vdash \mathbf{A} \supset (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.
R3. $\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \supset (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$.
R4. $\vdash (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{C} \vee \mathbf{A}) \supset \mathbf{C} \vee \mathbf{B}))$ [1].

(Obsérvese que hemos omitido algunos paréntesis exteriores innecesarios. Haremos omisiones semejantes donde no pueda haber ambigüedad, y también con frecuencia remplazaremos los paréntesis por puntos, comas, tres puntos, etc., de modo más o menos obvio.)

Cada una de estas reglas es un enunciado sobre el lenguaje de que se trata, no un enunciado del lenguaje. Cada regla o metaaxioma así dado estipula una infinidad de fórmulas del lenguaje, especificando que se trata de axiomas. Así, *R1* estipula que

'$(\mathrm{P}x \vee \mathrm{P}x) \supset \mathrm{P}x$'

es un axioma, y también que

'$(((\mathrm{P}x \vee \mathrm{P}x) \supset \mathrm{P}x) \vee ((\mathrm{P}x \vee \mathrm{P}x) \supset \mathrm{P}x)) \supset ((\mathrm{P}x \vee \mathrm{P}x) \supset \mathrm{P}x)$'

es un axioma. Como ya hemos observado, una *regla* es un enunciado de carácter general sobre el lenguaje que se estudia, mientras que un axioma es siempre una fórmula concreta dentro del lenguaje.

Antes de establecer los restantes axiomas es necesario definir el concepto de *variable libre*. Se dice que la aparición de una variable **x** en una fórmula **A** es una aparición *ligada* de **x** en **A** si y sólo si se halla en una parte de **A** de la forma '**(x)B**'; de otro modo esta aparición es una aparición *libre*. Asimismo, toda aparición de una constante individual en **A** es libre en **A**; y una aparición de un término será, en general, libre en **A** siempre que cada aparición de una variable en dicho término sea una aparición libre de esta variable en **A**. Así, la aparición del término '$\mathrm{f}\bar{a}x$' (en donde '**f**' es un funtor diádico) en '$\mathrm{P}'x\mathrm{f}\bar{a}x$' es libre, pero su aparición en '$(x)\mathrm{P}'x\bar{a}\mathrm{f}x$' no lo es.

Las reglas que estipulan los *Axiomas de cuantificación* pueden darse ahora del modo siguiente:

R5. $\vdash (\mathbf{x})\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, en donde **B** difiere de **A** sólo por contener apariciones libres de alguna variable o término **y** en donde se hallan apariciones libres de la variable **x** en **A**.

R6. $\vdash (\mathbf{x})(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \supset (\mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\mathbf{B})$, si no hay apariciones libres de la variable **x** en **A**.

(Obsérvese que cada uno de los metaaxiomas *R5* y *R6*, como *R1-R4*, estipula una infinidad de axiomas.)

Las dos reglas de deducción que se requieren son la *Regla del Modus Ponens* (*MP*) y la *Regla de Generalización* (*Gen*).

MP. Si $\vdash \mathbf{A}$ y $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, entonces $\vdash \mathbf{B}$.

Gen. Si $\vdash \mathbf{A}$, entonces $\vdash (\mathbf{x})\mathbf{A}$, siendo **x** una variable.

MP establece que si **A** es un teorema y si '$\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$' es un teorema, entonces **B** debe ser también un teorema. *Gen* establece que si **A** es un

[1] Estas reglas se deben esencialmente a BERNAYS. Véase P. BERNAYS, «Axiomatische Untersuchung der Aussagen-Kalküls der *Principia Mathematica*», *Mathematische Zeitschrift*, 25 (1926), pp. 305-20. *R3* puede dejarse a un lado si se altera ligeramente *R4*, intercambiando los lugares que '**C**' y '**B**' ocupan en el extremo de la derecha. Véanse los trabajos de E. GÖTLIND y HELENA RASIOWA, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 1947, pp. 1-4 y 1949, pp. 1-3.

teorema, entonces todo resultado de prefijar un cuantificador universal a **A** es también un teorema.

(Es evidente que no necesitaremos una regla de substitución para variables individuales. Mejor que llevando a cabo semejantes substituciones, podemos lograr el mismo efecto de un modo distinto: por ejemplo, en vez de hacer una substitución en un lugar determinado de una demostración, podemos retroceder a los axiomas o teoremas precedentes que contengan la variable deseada en la posición requerida; luego simplemente volvemos sobre nuestros pasos con dicha variable ya en su lugar, volviendo a escribir, en caso necesario, las variables ligadas que aparezcan.)

No es difícil poner de manifiesto que *R1-R6* junto con *MP* y *Gen* (empleando las definiciones *D1-D4* en la forma dada) proporcionan los teoremas básicos de la teoría clásica bivalente de funciones veritativas y cuantificadores. Esto se hará en los §§ B y C.

Muchas de las explicaciones anteriores son vagas y necesitan una formulación más precisa. En el capítulo siguiente daremos un análisis exacto de la estructura sintáctica de los sistemas lógicos de primer orden del tipo estudiado.

B. Algunos teoremas de las funciones veritativas

El concepto de *demostración* puede definirse por recurrencia—como ya se ha sugerido—como una serie finita de fórmulas, cada una de las cuales es un axioma o puede ser obtenida a partir de fórmulas anteriores de la serie por medio de *MP* o *Gen*. Una serie finita de fórmulas,

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n,$$

constituye, pues, una demostración siempre que $\mathbf{A}_i$ (para $1 \leqq i \leqq n$) sea por sí misma un axioma, o que $\mathbf{A}_i$ pueda obtenerse a partir de $\mathbf{A}_j$ y $\mathbf{A}_k$ ($j < i$, $k < i$, $j \neq k$) por *MP*, o que $\mathbf{A}_i$ pueda obtenerse a partir de $\mathbf{A}_j$ ($j < i$) por *Gen*. Un teorema puede considerarse, por tanto, como el último miembro de una demostración. En la práctica suele ser conveniente considerar también como demostración toda serie de fórmulas, cada una de las cuales sea, o un axioma, *o un teorema demostrado anteriormente*, o bien pueda ser obtenida a partir de éstos por *MP* o *Gen*. En este sentido, algo ampliado, daremos ahora las demostraciones.

En rigor, no demostraremos aquí teoremas individuales, sino más bien meta-teoremas, enunciados generales sobre el lenguaje que establecen que toda fórmula de tal y cual forma es un teorema. Los meta-teoremas son también un tipo de regla, junto con los meta-axiomas y las reglas de deducción. A veces los meta-teoremas o teoremas serán llamados *leyes* o *principios*.

Precisaremos en el capítulo siguiente estas groseras definiciones de 'demostración' y 'teorema'. Como consecuencia de las definiciones que daremos aquí, las reglas *MP* y *Gen* aparecerán también como teoremas de sintaxis. (Cf. *TG7a* y *TG7b* del capítulo III.)

Los teoremas y meta-teoremas se numerarán de modo que indiquen la sección en que aparecen: por ejemplo, *TB1* es el primer meta-teorema del § B. Como esta afirmación que acabamos de hacer se encuentra en el mismo capítulo en que *TB1* aparece incluido o demostrado, no es necesario dar también el número del capítulo. Un meta-teorema, teorema o regla demostrado o incluido en un capítulo diferente de aquél en que se menciona, llevará su número seguido del número del capítulo (en el cual se ha demostrado o indicado) entre paréntesis. Así, *TG4*(IV) es el cuarto teorema del § G del capítulo IV.

Veamos ahora algunas consecuencias de *R1-R4* solos, dejando a un lado de momento las reglas referentes a la cuantificación [1].

La primera regla o meta-teorema, que es una *ley de transitividad*, se sigue inmediatamente de *R4*.

TB1. $\vdash (A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$.

Tomamos en *R4* **C** como '$\sim$**C**' y luego empleamos *D1*.

Las tres reglas siguientes establecen teoremas que son leyes de *identidad* y de *tercio excluso*.

TB2a. $\vdash A \supset A$.

TB2b. $\vdash \sim A \vee A$.

TB3. $\vdash A \vee \sim A$.

TB2a se demuestra por *R1*, *R2*, *TB1* y *MP*. *TB2b* es consecuencia inmediata de *TB2a* mediante *D1*. *TB3* se sigue de *TB2b* utilizando *R3* y *MP*.

El procedimiento mediante el cual hemos obtenido *TB2a* a partir de *R1* y *R2* por medio de *TB1* es tan corriente que parece útil formular una regla especial para justificarlo. Esto es lo que se llama una *regla derivada*.

RD-TB1. Si $\vdash A \supset B$ y $\vdash B \supset C$, entonces $\vdash A \supset C$.

Esta regla puede ser establecida por *TB1*. Por hipótesis,

(1) $\vdash A \supset B$,

y

(2) $\vdash B \supset C$.

Pero por *TB1*,

(3) $\vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

Empleando (2), (3) y *MP* llegamos a

$\vdash ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

Tenemos, pues, como regla, que $\vdash A \supset C$ si por hipótesis (1) y (2).

Llamamos a esta regla *RD-TB1*, una regla derivada basada en el meta-teorema *TB1*. Podemos también obtener reglas derivadas a partir de *R1-R4*, de un modo análogo.

RD-R1. Si $\vdash A \vee A$ entonces $\vdash A$.

RD-R2. Si $\vdash A$ entonces $\vdash A \vee B$.

RD-R3. Si $\vdash A \vee B$ entonces $\vdash B \vee A$.

RD-R4. Si $\vdash A \supset B$ y $\vdash C \vee A$ entonces $\vdash C \vee B$.

(Las demostraciones son semejantes a la de *RD-TB1* a partir de *TB1*, y en ellas se requieren sólo *MP* y *R1-R4*.) El empleo de estas

[1] Entiéndase que, aquí y en el resto del libro, las demostraciones consistirán, no en mostrar las series de fórmulas que las constituyen, sino en indicar instrucciones explícitas para construir dichas series.

reglas nos ahorrará muchos pasos en el mecanismo de las demostraciones.

Las dos leyes siguientes son formas de principios de *doble negación*.

TB4. $\vdash A \supset \sim\sim A$.

TB5. $\vdash \sim\sim A \supset A$.

TB4 es inmediato a partir de *TB3*, poniendo '$\sim A$' en lugar de A: al hacer esto tenemos

$$\vdash \sim A \vee \sim\sim A,$$

lo cual, por *D1*, nos da *TB4*. Para mostrar cómo se llega a *TB5* observamos primero que por *TB4*

$$\vdash \sim A \supset \sim\sim\sim A.$$

Después, usando *RD-R4* y *TB3*, tenemos que

$$\vdash A \vee \sim\sim\sim A.$$

A partir de aquí, empleando *RD-R3* tenemos que

$$\vdash \sim\sim\sim A \vee A,$$

de donde obtenemos *TB5* por *D1*.

Tenemos también las siguientes reglas derivadas, que corresponden a *TB4* y *TB5*.

RD-TB4. Si $\vdash A$ entonces $\vdash \sim\sim A$.

RD-TB5. Si $\vdash \sim\sim A$ entonces $\vdash A$.

La siguiente es una ley de *contraposición*.

TB6. $\vdash (A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$.

Empleando *R4* sabemos que

$$\vdash (B \supset \sim\sim B) \supset ((\sim A \vee B) \supset (\sim A \vee \sim\sim B)).$$

A partir de lo cual, teniendo en cuenta *TB4* y *MP* sabemos que

(1) $$\vdash (\sim A \vee B) \supset (\sim A \vee \sim\sim B).$$

Pero por *R3*

(2) $$\vdash (\sim A \vee \sim\sim B) \supset (\sim\sim B \vee \sim A).$$

Y de aquí, por (1), (2) y *RD-TB1* obtenemos el teorema buscado (empleando también *D1*).

Las dos leyes siguientes son *leyes de De Morgan*.

TB7. $\vdash \sim(A \,.\, B) \supset (\sim A \vee \sim B)$.

TB8. $\vdash (\sim A \vee \sim B) \supset \sim(A \,.\, B)$.

TB7 es inmediato a partir de *TB5*, pues por *TB5*

$$\vdash \sim\sim(\sim A \vee \sim B) \supset (\sim A \vee \sim B).$$

Pero '$\sim\sim(\sim A \vee \sim B)$' es, por *D2*, sencillamente '$\sim(A \,.\, B)$'. *TB8* se demuestra análogamente utilizando *TB4*.

Las leyes *asociativas* para la disyunción son las siguientes:

TB9. $\vdash (A \vee (B \vee C)) \supset ((A \vee B) \vee C)$.

TB10. $\vdash ((A \vee B) \vee C) \supset (A \vee (B \vee C))$.

Para demostrar *TB9* procedemos del modo que sigue: primero obtenemos

$$\vdash C \supset (A \vee C),$$

por *R2*, *R3* y *RD-TB1*. Mediante este resultado y *RD-R4* también se tiene

$$\vdash (B \vee C) \supset (B \vee (A \vee C)).$$

Análogamente, sabemos que

$$\vdash (A \vee (B \vee C)) \supset (A \vee (B \vee (A \vee C))),$$

y, usando *R3* y *RD-TB1*, que

(1) $\vdash (A \vee (B \vee C)) \supset ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$.

Obsérvese que por *R2*, *R3* y *RD-TB1*,

$$\vdash (A \vee C) \supset (B \vee (A \vee C)).$$

Pero por *R2*,

$$\vdash A \supset (A \vee C).$$

Utilizando estas fórmulas y *RD-TB1*, tenemos que

$$\vdash A \supset (B \vee (A \vee C)).$$

Mediante lo cual y *RD-R4* sabemos que

$$\vdash ((B \vee (A \vee C)) \vee A) \supset ((B \vee (A \vee C)) \vee (B \vee (A \vee C))).$$

Pero por *R1*,

$$\vdash ((B \vee (A \vee C)) \vee (B \vee (A \vee C))) \supset (B \vee (A \vee C)).$$

Empleando estas fórmulas y *RD-TB1* llegamos a

$$\vdash ((B \vee (A \vee C)) \vee A) \supset (B \vee (A \vee C)).$$

Combinando esto con la (1) antes hallada sabemos que

(2) $\vdash (A \vee (B \vee C)) \supset (B \vee (A \vee C))$.

También se obtiene

(3) $\vdash (A \vee (B \vee C)) \supset (A \vee (C \vee B))$,

cuando se utilizan *RD-R4* y *R3*. Por (2),

$$\vdash (A \vee (C \vee B)) \supset (C \vee (A \vee B)).$$

Utilizando ahora esta fórmula, (3) y *RD-TB1*, tenemos que

(4) $\vdash (A \vee (B \vee C)) \supset (C \vee (A \vee B))$.

Pero, usando *R3*, llegamos además a

$$\vdash (C \vee (A \vee B)) \supset ((A \vee B) \vee C).$$

De donde obtenemos el meta-teorema *TB9* por esta última fórmula, (4) y *RD-TB1*.

TB10, que establece teoremas inversos a los establecidos por *TB9*, puede demostrarse a partir de *TB9* empleando varias veces la ley conmutativa *R3*. Se observa primero que, por *TB9*,

$$\vdash (C \vee (B \vee A)) \supset ((C \vee B) \vee A).$$

Después se utilizan *R3*, *RD-R4* y *RD-TB1*.

La ley *conmutativa* para la conyunción es como sigue:

TB11. $\vdash (A \cdot B) \supset (B \cdot A)$.

Por *R3* sabemos que

$$\vdash (\sim B \vee \sim A) \supset (\sim A \vee \sim B).$$

A partir de esta fórmula, usando *RD-TB6* y *D2*, obtenemos el meta-teorema.

Correspondiendo a cada meta-teorema que afirma que ciertas fórmulas de forma condicional son teoremas,

(1) $\vdash A \supset B$,

podemos evidentemente afirmar, en vista de *MP*, una regla derivada

(2) Si $\vdash A$, entonces $\vdash B$.

Si *TBn* afirma (1), entonces la regla correspondiente *RD-TBn* afirma (2). Si *TBn* afirma que

(3) $\vdash A \supset (B \supset C)$.

entonces *RD-TBn* puede también ser tomado como afirmación de que

(4) Si $\vdash A$ y $\vdash B$, entonces $\vdash C$

La demostración es inmediata a partir de (3), empleando dos veces *MP*.

En adelante no será necesario establecer la regla o reglas derivadas correspondientes a un meta-teorema dado, pero podremos utilizar

libremente dichas reglas, sean cuales fueren, siempre que sean necesarias. Los meta-teoremas correspondientes serán generalmente de las formas (1) o (3) anteriormente dadas, y las reglas mismas de las formas (2) o (4).

No todas las reglas derivadas necesarias corresponden explícitamente a meta-teoremas previamente demostrados: con frecuencia es conveniente y útil admitir también otras formas de regla derivada, entre las cuales son especialmente importantes las *Reglas de substitución.* La primera regla de este tipo es la siguiente:

RD-Subst 1. Si $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ y $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ entonces $\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D}$ y $\vdash \mathbf{D} \supset \mathbf{C}$, donde, (*a*) **C** contiene al menos una aparición de **A**, (*b*) **D** difiere sólo de **C** por contener una aparición de **B** en lugar de una sola aparición de **A** en **C**, y (*c*) **C** es de una de las formas (i) '$\sim$**A**', (ii) '(**A** v **A**)' o (iii) '(**A**′ v **A**)', en que **A** no aparece en **A**′.

La demostración es la siguiente. Observamos primero que, tomando **C** como (i), (ii) o (iii), **D** toma respectivamente las formas

'$\sim$**B**', '(**B** v **A**′)' o '(**A**′ v **B**)'.

Pero si por hipótesis, $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ y $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, podemos hacer patente que

$$\vdash \sim\mathbf{A} \supset \sim\mathbf{B}$$

y que

$$\vdash \sim\mathbf{B} \supset \sim\mathbf{A}$$

en virtud de *RD-TB6;* igualmente se tienen

$$\vdash (\mathbf{A}' \text{ v } \mathbf{A}) \supset (\mathbf{A}' \text{ v } \mathbf{B})$$

y

$$\vdash (\mathbf{A}' \text{ v } \mathbf{B}) \supset (\mathbf{A}' \text{ v } \mathbf{A}),$$

por *RD-R4;* y, por fin,

$$\vdash (\mathbf{A} \text{ v } \mathbf{A}') \supset (\mathbf{B} \text{ v } \mathbf{A}')$$

y

$$\vdash (\mathbf{B} \text{ v } \mathbf{A}') \supset (\mathbf{A} \text{ v } \mathbf{A}'),$$

debido a las fórmulas precedentes, *R3* y *RD-TB1.* Por tanto, en todos estos casos, y bajo las hipótesis admitidas,

$$\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D} \text{ y } \vdash \mathbf{D} \supset \mathbf{C}.$$

Así queda justificada la regla.

Observamos ahora que no es imprescindible la hipótesis (*c*) en *RD-Subst 1,* como puede quizá hacerse ver mejor mediante un ejemplo. Supongamos que **C** es de la forma

'$\sim(\sim\mathbf{A} \text{ v } (\mathbf{A}_2 \text{ v } \mathbf{A}_3))$'

en donde **A** no aparece en $\mathbf{A}_2$ ni en $\mathbf{A}_3$. **D** es, pues,

'$\sim(\sim\mathbf{B} \text{ v } (\mathbf{A}_2 \text{ v } \mathbf{A}_3))$'.

Aquí **C** no es de las formas (i), (ii) o (iii), como en la hipótesis (*c*) de *RD- Subst 1;* y, sin embargo, podemos mostrar que

$$\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D} \text{ y } \vdash \mathbf{D} \supset \mathbf{C}$$

del modo siguiente. Por *RD- Subst 1,* bajo las hipótesis de que partimos,

(1) $$\vdash \sim\mathbf{A} \supset \sim\mathbf{B}$$

y

(2) $$\vdash \sim\mathbf{B} \supset \sim\mathbf{A}.$$

Utilizando de nuevo *RD-Subst 1,* con las hipótesis (1) y (2), sabemos que

(3) $$\vdash (\sim\mathbf{A} \text{ v } (\mathbf{A}_2 \text{ v } \mathbf{A}_3)) \supset (\sim\mathbf{B} \text{ v } (\mathbf{A}_2 \text{ v } \mathbf{A}_3)),$$

y que

(4) $\vdash (\sim \mathbf{B} \vee (\mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_3)) \supset (\sim \mathbf{A} \vee (\mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_3))$.

Empleando por tercera vez *RD- Subst 1* y tomando ahora (3) y (4) como hipótesis, tenemos que

$$\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D} \text{ y } \vdash \mathbf{D} \supset \mathbf{C}.$$

Así pues, podemos abandonar la hipótesis mencionada mediante reiteradas aplicaciones de la regla. Es evidente que también puede abandonarse la hipótesis (*a*).

Sea *RD- Subst 2* igual a *RD- Subst 1* si se omiten las hipótesis (*a*) y (*c*). La demostración es simplemente la extensión del argumento anterior al caso general. (Esta extensión de la demostración se efectúa mediante un procedimiento *inductivo* o recurrente en el metalenguaje: véase (III, B).)

La tercera regla de substitución generaliza la segunda para permitir a *cero o más* apariciones de **A** en **C** ser remplazadas por apariciones de **B**.

RD- Subst 3. Si $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ y $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, entonces $\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D}$ y $\vdash \mathbf{D} \supset \mathbf{C}$, en donde **D** difiere de **C** solamente por contener apariciones de **B** en lugar de algunas o todas las apariciones (si las hay) de **A** en **C**.

La demostración no es difícil, ahora que tenemos *RD- Subst 2*. Supongamos que **C** contiene solamente $n (n \geqq 0)$ apariciones de **A**. Sea $\mathbf{D}_1$ diferente de **C** (si lo es) tan sólo por contener **B** en lugar de la primera aparición por la izquierda de **A** en **C**.

$$\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D}_1 \text{ y } \vdash \mathbf{D}_1 \supset \mathbf{C}.$$

Sea $\mathbf{D}_2$ diferente de $\mathbf{D}_1$ —si lo es— solamente por tener **B** en vez de la primera aparición por la izquierda de **A** en $\mathbf{D}_1$.

Entonces, con las hipótesis de partida y según *RD-Subst 2*, tenemos también

$$\vdash \mathbf{D}_1 \supset \mathbf{D}_2 \text{ y } \vdash \mathbf{D}_2 \supset \mathbf{D}_1.$$

Y así hasta que obtenemos cierto $\mathbf{D}_n$ igual a **D**. Utilizando después varias veces *RD-TB 1* obtenemos finalmente que

$$\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{D} \text{ y } \vdash \mathbf{D} \supset \mathbf{C}.$$

De aquí la regla.

Aunque la demostración de *RD-Subst 3* pueda parecer laboriosa, su empleo facilitará muchas pruebas subsiguientes: todo el trabajo, por decirlo así, se ha empleado en la demostración de esta regla, de *RD-Subst 1* y de *RD-Subst 2*. Las restantes demostraciones son ahora fáciles.

Empleando la tercera regla de substitución, los teoremas siguientes son fácilmente demostrables mediante *TB4* y *TB5*.

TB12. $\vdash \sim(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \supset (\sim \mathbf{A} \,.\, \sim \mathbf{B})$.

TB13. $\vdash (\sim \mathbf{A} \,.\, \sim \mathbf{B}) \supset \sim(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

Podemos también demostrar las leyes *asociativas* para la conyunción.

TB14. $\vdash (\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} .\, \mathbf{C})) \supset ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \,.\, \mathbf{C})$.

TB15. $\vdash ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \,.\, \mathbf{C}) \supset (\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}))$.

Las dos leyes siguientes son leyes de la *simplificación* para la conyunción.

TB16. $\vdash (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset \mathbf{A}$.

TB17. $\vdash (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset \mathbf{B}$.

Las demostraciones son muy fáciles. Estas leyes nos permiten, por así decirlo, dividir una conyunción en sus componentes. La siguiente ley nos permite construir una conyunción a partir de sus componentes.

TB18. $\vdash \mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}))$.

La demostración se basa en *TB3* y *TB10*.

Una regla derivada correspondiente a *TB18* es como sigue:

RD-TB18. Si $\vdash \mathbf{A}$ y $\vdash \mathbf{B}$ entonces $\vdash \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}$.

Tenemos también el siguiente corolario inmediato de *TB18:*

TB19. $\vdash (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{B} \supset \mathbf{A}) \supset (\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}))$.

Una regla derivada correspondiente a *TB19* enuncia que si

$$\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \text{ y } \vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A},$$

entonces

$$\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$$

De aquí, a partir de *TB4* y *TB5* (las dos leyes de doble negación) y utilizando *RD-TB19*, obtenemos inmediatamente que

TB20a. $\vdash \mathbf{A} \equiv \sim\sim \mathbf{A}$.

De un modo análogo podemos demostrar las siguientes equivalencias.

TB20b. $\vdash (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$.

TB20c. $\vdash ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$.

TB20d. $\vdash ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \,.\, \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}))$.

TB20e. $\vdash \mathbf{A} \equiv (\mathbf{A} \vee \mathbf{A})$.

TB20f. $\vdash \mathbf{A} \equiv (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A})$.

Otra regla de substitución muy útil es la siguiente, que enunciamos en términos de equivalencia:

RD-Subst 4. Si $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, entonces $\vdash \mathbf{C} \equiv \mathbf{D}$, donde (etc., como en *RD-Subst 3*).

También es útil a veces la siguiente regla de substitución:

RD-Subst 5. Si $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ y $\vdash \mathbf{C}$, entonces $\vdash \mathbf{D}$, si (etc., como en *RD-Subst 3*).

La siguiente ley

TB21. $\vdash (\sim\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

es ahora fácilmente demostrable en virtud de *RD-Subst. 4* y *TB20a.*

Ahora nos contentamos con indicar varios metateoremas más a los que podamos referirnos más tarde.

TB22. $\vdash (\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{C})) \equiv ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset \mathbf{C})$.

TB23. $\vdash (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \supset (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}))$.

TB24. $\vdash (\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \,.\, \mathbf{C})) \equiv ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))$.

TB25. $\vdash (\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \equiv ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}))$.

TB26. $\vdash ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{A} \supset \mathbf{C})) \equiv (\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}))$.

TB27. $\vdash ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{C} \supset \mathbf{B})) \equiv ((\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \supset \mathbf{B})$.

TB28. $\vdash ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \supset \mathbf{C})) \equiv (\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}))$.

TB29. $\vdash (\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \equiv \mathbf{C})) \equiv ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \supset \mathbf{C}))$.

TB30. $\vdash ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{C} \supset \mathbf{D})) \supset ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}) \supset (\mathbf{B} \,.\, \mathbf{D}))$.

TB31. $\vdash ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{C} \supset \mathbf{D})) \supset ((\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \supset (\mathbf{B} \vee \mathbf{D}))$.

TB32. $\vdash (\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{A} \supset \mathbf{B})) \supset \mathbf{B}$.

TB33. $\vdash (\mathbf{A} \,.\, \sim\mathbf{A}) \supset \mathbf{B}$.

C. Teoremas de cuantificación

Estudiaremos ahora algunas de las consecuencias de las Reglas de cuantificación, de las cuales las más importantes son las siguientes:

TC1 . $\vdash \mathbf{B} \supset (\mathbf{Ex})\,\mathbf{A}$, si **B** difiere de **A** sólo por contener apariciones libres de alguna variable o término allí donde hay apariciones libres de la variable **x** en **A**.

La demostración es la siguiente: por *R5*,

$$\vdash (\mathbf{x}) \sim \mathbf{A} \supset \sim \mathbf{B},$$

si (etc.) (obsérvese que si **B** difiere de **A** del modo descrito en *R5*, entonces '~**B**' difiere de '~**A**' del mismo modo); de donde, por *RD-TB6*,

$$\vdash \sim\sim \mathbf{B} \supset \sim (\mathbf{x}) \sim \mathbf{A},$$

si (etc.); y de aquí se obtiene *TC1*, mediante *D4*, *TB4*, y *RD-TB1*.

En lo sucesivo omitiremos con frecuencia en las demostraciones la referencia a *R1-R4*, a *MP* o a cualquiera de los metateoremas o reglas del § B, pues el modo en que se utilizan dichos metateoremas o reglas será suficientemente obvio. Asimismo, mientras no se estipule otra cosa, en este apartado se ha de entender que '**x**', '**y**', y '**z**' abarcan sólo variables en vez de términos.

Utilizando *TC1* y *R5* tenemos que

TC2. $\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \supset (\mathbf{Ex})\mathbf{A}$.

Los teoremas recíprocos de los estipulados por *R6* son demostrables como sigue:

TC3. $\vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\mathbf{B} \;.\; \supset \;.\; (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, si **x** no aparece libre en **A**.

Es claro que

$$\vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\mathbf{B} \;.\; \supset \;.\; \mathbf{A} \vee \mathbf{B},$$

por *R5* y *RD-R4*; de donde, por *Gen*,

(1) $$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\mathbf{B} \;.\; \supset \;.\; \mathbf{A} \vee \mathbf{B}).$$

Pero, debido a *R6*, también

(2) $$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\mathbf{B} \;.\; \supset \;.\; \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) :\; \supset :\mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\,\mathbf{B} \;.\; \supset \;.\; (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}),$$

si **x** no aparece libre en '**A** v (**x**) **B**'. Pero si **x** no aparece libre en **A**, entonces tampoco puede aparecer libre en '**A** v (**x**) **B**'; de aquí obtenemos *TC3*, utilizando (1), (2) y *MP*.

Combinando *TC3* con *R6* tenemos que

TC4. $\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \;.\; \equiv \;.\; \mathbf{A} \vee (\mathbf{x})\,\mathbf{B}$, si no hay apariciones libres de **x** en **A**.

Podemos formar reglas derivadas de *R5*, *R6*, *TC1*, *TC2* o *TC3* exactamente del mismo modo que lo hicimos en el § B, siendo los teoremas estipulados por dichas reglas de forma condicional. *RD-TC2*, por ejemplo, se lee:

Si $\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{A}$, entonces $\vdash (\mathbf{Ex})\,\mathbf{A}$.

El uso de estas reglas en los lugares oportunos facilitará algo las desmostraciones subsiguientes.

El siguiente metateorema se sigue inmediatamente de *TC4* en virtud de *D1*.

TC5. $\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \;.\; \equiv \;.\; \mathbf{A} \supset (\mathbf{x})\,\mathbf{B}$, si **x** no es libre en **A**.

Tenemos *dos* reglas derivadas que corresponden a *TC5* y estipulan equivalencias. La primera establece que si

$$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}),$$

(donde **x** no es libre en **A**), entonces

$$\vdash \mathbf{A} \supset (\mathbf{x})\,\mathbf{B},$$

dada la misma hipótesis; la otra regla establece la inversa de ésta. Podemos referirnos a cualquiera de estas reglas con la sigla *RD-TC5*.

La siguiente regla nos permite *distribuir* un cuantificador en una conyunción:

TC6. $\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) :\equiv : (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{B}$.

Como los teoremas estipulados por esta regla son equivalencias o bicondicionales, dividimos la demostración en dos partes y demostramos primero los condicionales de izquierda a derecha. Por *R5*,

$$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) : \supset : \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}.$$

De donde, empleando *TB16* y *RD-TB1*,

(1) $$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset \mathbf{A}.$$

Análogamente,

(2) $$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset \mathbf{B}.$$

A partir de (1), (2), *Gen* y *RD-TC5* obtenemos que

$$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset (\mathbf{x})\,\mathbf{A},$$

y que

$$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset (\mathbf{x})\,\mathbf{B}.$$

Combinando estas fórmulas obtenemos las condicionales de izquierda a derecha, es decir que

(3) $$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) : \supset : (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{B}.$$

Ahora, para demostrar las inversas, tenemos evidentemente que

$$\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \supset \mathbf{A},$$

y que

$$\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{B} \supset \mathbf{B}.$$

De donde,

$$\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{B} : \supset : \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}.$$

Debido a *Gen* y *RD-TC5*, tenemos que

(4) $$\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{B} : \supset : (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}).$$

Y combinando (3) y (4) obtenemos *TC6*.

Las dos reglas siguientes proporcionan principios referentes a la cuantificación *vacía:* nos dicen que una fórmula que consista en un cuantificador '(**x**)' o '(E**x**)' prefijado a una fórmula **A** (que no contenga una aparición libre de **x**), es equivalente a **A** misma.

TC7a. $\vdash (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$, si **x** no es libre en **A**.

TC7b. $\vdash (\mathrm{E}\mathbf{x})\,\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$, (etc., como en *TC7a*).

La ley siguiente es también una ley *distributiva*, demostrable por *TC6* y *TC7a*.

TC8. $\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) :\equiv : \mathbf{A} \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{B}$, (si no hay apariciones libres de **x** en **A**).

Tenemos, asimismo, una ley de distribución del cuantificador universal con respecto a '$\supset$':

TC9. $\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, \supset \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{A} \supset (\mathbf{x})\,\mathbf{B}$.

Es claro que

$$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{A} : \supset : (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, \mathbf{A}.$$

De donde

$$\vdash (\mathbf{x})\,(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{x})\,\mathbf{A} : \supset : \mathbf{B}.$$

De aquí obtenemos *TC9* por *Gen* y *RD-TC5*. (Las fórmulas inversas no son válidas).

También tenemos la correspondiente ley distributiva referente a la equivalencia material:

TC10. $\vdash (x)(A \equiv B) \,.\supset.\, (x)A \equiv (x)B$.

Su demostración se basa en *TC9* y *TC6*.

Las leyes siguientes se refieren a la relación mutua entre la cuantificación universal y la existencial.

TC11a. $\vdash (Ex)A \equiv \sim(x)\sim A$.

TC11b. $\vdash \sim(Ex)A \equiv (x)\sim A$.

TC11c. $\vdash (Ex)\sim A \equiv \sim(x)A$.

TC11d. $\vdash \sim(Ex)\sim A \equiv (x)A$.

Las demostraciones correspondientes no son difíciles.

Los siguientes metateoremas, referentes a la cuantificación existencial, están relacionados con *TC9* y *TC10*.

TC12. $\vdash (x)(A \supset B) \,.\supset.\, (Ex)A \supset (Ex)B$.

TC13. $\vdash (x)(A \equiv B).\supset.\, (Ex)A \equiv (Ex)B$.

Las siguientes reglas serán indicadas sin demostración.

TC14. $\vdash (x)(A \supset B).\equiv.(Ex)A \supset B$, si no hay apariciones libres de **x** en **B**.

TC15. $\vdash (Ex)(A \supset B) \,.\equiv.\, (x)A \supset B$, si (etc., como en *TC14*).

TC16. $\vdash (x)(A \supset B) \,.\, (x)(B \supset C):\supset:(x)(A \supset C)$.

TC17. $\vdash (x)(A \equiv B) \,.\supset.\, (x)((A \,.\, C) \equiv (B \,.\, C))$.

TC18. $\vdash (Ex)(A \,.\, B):\equiv:A \,.\, (Ex)B$, si no hay apariciones libres de **x** en **A**.

TC19. $\vdash (Ex)(A \vee B):\equiv:A \vee (Ex)B$, si (etc., como en *TC18*).

TC20. $\vdash (Ex)(A \supset B) \,.\equiv.\, A \supset (Ex)B$, si (etc., como en *TC18*).

TC21. $\vdash (x)A \vee (x)B \,.\supset.\, (x)(A \vee B)$.

Es evidente que las fórmulas inversas de los teoremas estipulados por *TC21* no son válidas.

TC22. $\vdash (Ex)(A \vee B) \,.\equiv.\, (Ex)A \vee (Ex)B$.

TC23. $\vdash (Ex)(A \,.\, B):\supset:(Ex)A \,.\, (Ex)B$.

Las inversas de los teoremas estipulados por *TC23* tampoco son válidas.

TC24. $\vdash \sim(Ex)(A \,.\, B) \equiv (x)(A \supset \sim B)$.

TC25. $\vdash (Ex)A \,.\supset.\, (x)(A \supset B) \equiv B$, si no hay apariciones libres de **x** en **B**.

TC26. $\vdash \sim(Ex)A \supset (x)(A \supset B)$.

TC27. $\vdash (Ex)(A \supset B).\equiv.\, (x)A \supset (Ex)B$.

TC28. $\vdash (x)(A \vee B) \,.\supset.\, (Ex)A \vee (Ex)B$.

TC29. $\vdash (x)(A \vee B) \,.\supset.\, (x)A \vee (Ex)B$.

TC30. $\vdash (x)A \vee (Ex)B \,.\supset.\, (Ex)(A \vee B)$.

TC31. $\vdash (x)(y)A \,.\equiv.\, (y)(x)A$.

TC32. $\vdash (Ex)(Ey)A \,.\equiv.\, (Ey)(Ex)A$.

TC33. $\vdash (Ex)(y)A \,.\supset.\, (y)(Ex)A$.

Con esto se completa nuestro breve examen de los metateoremas elementales básicos referentes a los signos conectivos de funciones veritativas y a los cuantificadores. Estas leyes serán constantemente utilizadas en lo sucesivo, generalmente sin mencionarlas de una manera explícita.

Para teoremas de tipo más avanzado sobre funciones veritativas y cuantificadores, remitimos al lector a los tratados ya mencionados de Church, Hilbert-Bernays, Hilbert-Ackermann y otros autores.

D. Abstracción

Introducimos ahora una notación para una operación de *abstracción* [1].

Podríamos introducir la siguiente definición:

(Def) '$\mathbf{x} \varepsilon \mathbf{y} \ni \mathbf{B}$' es una posible notación para **A** (en donde **x** es un término, y una variable que no aparece libre en **A**, y **B** sólo difiere de **A** por contener apariciones libres de **y** en 0 o más lugares en que haya apariciones libres de **x** en **A**).

Aunque esta definición no sería una abreviación *sensu stricto*, introduce una posible notación que es conveniente y útil. Por ejemplo, nos permitirá escribir.

$$\text{`}x \varepsilon x' \ni \mathrm{P}\, x'\text{'} \text{ o } \text{`}x \varepsilon x' \ni \mathrm{P}'\, x'\, x''\text{'}$$

como otras formas (respectivamente) de

$$\text{`}\mathrm{P}x\text{'} \text{ o } \text{`}\mathrm{P}'xx''\text{'}$$

y también

(1) $$\text{`}x \varepsilon x' \ni (\mathrm{P}x' \;.\mathrm{v}.\; \sim(\mathrm{E}x'')\, \mathrm{P}'x''x')\text{'}$$

como otra forma de

(2) $$\text{`}(\mathrm{P}x \;.\mathrm{v}.\; \sim(\mathrm{E}x'')\, \mathrm{P}'x''x)\text{'}.$$

En (1), por ejemplo, la expresión

$$\text{`}x' \ni (\mathrm{P}x' \;.\mathrm{v}.\; \sim(\mathrm{E}x'')\, \mathrm{P}'x''x')\text{'}$$

se muestra explícitamente como un predicado, siendo en efecto expresión de una propiedad adscrita a x en (2). Un modo quizá mejor de escribir (1), más de acuerdo con la convención de escribir '$\mathrm{P}\, x$' en lugar de '$x \varepsilon \mathrm{P}$', sería

$$\text{`}x' \ni (\mathrm{P}x' \;.\mathrm{v}.\; \sim(\mathrm{E}x'')\, \mathrm{P}'x''x')\, (x)\text{'}.$$

y, puesto que no puede originar ninguna ambigüedad, podemos abandonar el paréntesis que encuadra la última aparición (a la derecha) de 'x'. O bien, de un modo más general, otra posible manera de escribir el definiendum de la (Def) anterior será:

$$\text{`}\mathbf{y} \ni \mathbf{B}\, \mathbf{x}\text{'}$$

El '$\ni$' es el símbolo de Peano para la abstracción de clase [2]. Su empleo aquí es lo bastante parecido al de Peano para justificar la notación. Llamemos *abstracto monádico* a toda expresión de la forma '$\mathbf{y} \ni \mathbf{B}$'; el empleo de abstractos será especialmente útil y conveniente al tratar con rigor, más tarde, algunas de las propiedades semánticas de los lenguajes de primer orden (capítulo IV y siguientes).

Obsérvese que, en virtud de (Def), no es en absoluto necesario tomar como parte de la notación primitiva una notación para los abstractos, pues estas expresiones pueden siempre ser eliminadas. Aunque teóricamente podemos perfectamente prescindir de ellas,

---

[1] La palabra abstracción está empleada aquí en un sentido técnico preciso, que, naturalmente, no debe confundirse con el del § F del capítulo I.

[2] Cf. G. Peano, *Formulaire de Mathématiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1901), p. 1.

en la práctica se gana mucho mediante su utilización repetida; de hecho, en el desarrollo que sigue, el uso que se hará de ellas será fundamental. *Los abstractos que no contengan variables libres* (junto con constantes predicativas primitivas monádicas) *se considerarán los tipos fundamentales de expresiones denotadoras.* Por tanto, en lugar de introducir la definición (Def) anterior, preferimos incluir una notación para la abstracción entre los elementos primitivos del sistema lingüístico.

Añadamos, pues, '$\ni$' a los símbolos primitivos lógicos, e incorporemos a la definición de 'fórmula' la cláusula siguiente.

5. Si **A** es una fórmula, **x** es un término e **y** es una variable, entonces '**y** $\ni$ **A x**' es una fórmula.

Y a las reglas *R1-R6* añadamos la siguiente regla que estipula los *Axiomas de abstracción.*

Abst. $\vdash$ **y** $\ni$ **B x** . $\equiv$. **A**, si (etc., como en la definición (Def anterior).

En lo sucesivo se entenderá que las reglas lógicas comprenden *R1-R6*, *MP Gen* y *Abst.*

Un abstracto '**x** $\ni$ **A**' en el cual no hay apariciones libres de **x** en **A**, se llama abstracto *vacío;* en caso contrario, *no vacío.*

Las apariciones de **x** en **A** en el contexto '**x** $\ni$ **A**' deben ser ahora consideradas como apariciones *ligadas*, de suerte que se han de enmendar ligeramente las definiciones de *aparición ligada* y *aparición libre* dadas anteriormente en el § A.

Los abstractos monádicos que no contienen variables libres se comportan de un modo muy semejante a como lo hacen las constantes predicativas primitivas monádicas; por ello nos hemos de referir a ellos con frecuencia como constantes predicativas *definidas.* Las constantes predicativas comprenden, pues, ambos tipos: las primitivas y las definidas.

Puede preguntarse qué tipo de entidad representan las constantes predicativas definidas; llamaremos a estas entidades *pseudo-clases* o (siguiendo a Quine) *clases virtuales* de objetos del campo fundamental. Por ejemplo, puede considerarse que la fórmula

$$\text{`}x \ni (Px \,.\vee.\, \sim(Ex'')\, P'x''x)\text{'}$$

representa la totalidad de los objetos que tienen la propiedad P o no son soportes de la relación P′ para ningún objeto. Esta totalidad de objetos no es estrictamente una clase: las clases (con relación a un lenguaje dado) son el tipo de entidad que puede tomarse con entero sentido como valor para las variables de clase de dicho lenguaje, siempre que éste contenga dichas variables además y por encima de las variables individuales; pero los lenguajes que estudiamos no contienen dichas variables, luego aquellas totalidades son meramente virtuales. (Véase (IV, C.).)

En lo sucesivo, '**F**', '**G**' y '**H**' serán variables (del metalenguaje no formal) que abarcarán la(s) constante(s) predicativa(s) monádica(s) y los abstractos monádicos que no contengan variables libres. Tomaremos, asimismo, '**x**', etc., como términos, a no ser que el contexto requiera que se tomen únicamente como variables.

Lo que podemos llamar *identidad* de las clases virtuales es definible del modo siguiente:

$$\text{`}\mathbf{F} = \mathbf{G}\text{' abrevia a `}(\mathbf{x})\,(\mathbf{F}\,\mathbf{x} \,.\equiv.\, \mathbf{G}\,\mathbf{x})\text{'}.$$

Dos clases virtuales son idénticas si y sólo si los miembros de la una son exactamente los miembros de la otra.

Podríamos definir aquí varios otros conceptos referentes a las clases virtuales, como el de *inclusión* de dos clases virtuales, la *suma lógica* de dos clases virtuales, etc.; pero tales conceptos no son necesarios para nuestros fines presentes.

Además de *Abst* tenemos las siguientes reglas referentes a los abstractos:

TD1. $\vdash \mathbf{x} \in \mathbf{A}\,\mathbf{y} . \equiv . \mathbf{A}$, si '$\mathbf{x} \in \mathbf{A}$' es vacío.

TD2a. $\vdash \mathbf{x} \in (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})\,\mathbf{y} :\equiv: \mathbf{x} \in \mathbf{A}\,\mathbf{y} . \vee . \mathbf{x} \in \mathbf{B}\,\mathbf{y}$.

TD2b. $\vdash \mathbf{x} \in \sim\mathbf{A}\,\mathbf{y} . \equiv . \sim\mathbf{x} \in \mathbf{A}\,\mathbf{y}$.

TD2c. $\vdash \mathbf{x} \in (\mathbf{y})\,\mathbf{A}\,\mathbf{z} . \equiv . (\mathbf{y})\,\mathbf{x} \in \mathbf{A}\,\mathbf{z}$, si **x** e **y** son variables distintas, y **z** es cualquier término en el que **y** no aparezca libre.

TD3a. Si $\vdash \mathbf{A}$, entonces $\vdash \mathbf{y} \in \mathbf{A}\,\mathbf{x}$.

TD3b. Si $\vdash \sim\mathbf{A}$, entonces $\vdash \sim \mathbf{y} \in \mathbf{A}\,\mathbf{x}$.

Si '$\mathbf{y} \in \mathbf{A}$' es vacío, *TD3a* es válido, en virtud de *TD1*. Supongamos, pues, que '$\mathbf{y} \in \mathbf{A}$' no es vacío; sea **A** diferente de cierto **B** tan sólo por contener apariciones libres de una variable **y** en uno o varios lugares de **B** en que hubiera apariciones libres de cierto término **x** (**y** no aparezca libre en **B**); entonces, si $\vdash \mathbf{A}$, $\vdash (\mathbf{y})\,\mathbf{A}$ (por *Gen*) y también $\vdash \mathbf{B}$ (por *R5* y *MP);* pero entonces, por *Abst*, también $\vdash \mathbf{y} \in \mathbf{A}\,\mathbf{x}$. La demostración de *TD3b* es análoga.

Hemos estado hablando sólo de abstractos monádicos. Podrían quererse introducir también abstractos (relacionantes) con más de un lugar vacío (de grado superior). Para muchas investigaciones semánticas de este libro, lo importante es que no habrá ninguna necesidad de abstractos de grado superior; pero si se necesitan pueden introducirse fácilmente: pues para todo $n \geqq 2$, podemos definir expresiones como

$$'x_1 \ldots x_n \in y_1 \ldots y_n \in X'$$

o

$$'y_1 \ldots y_n \in X\,x_1 \ldots x_n'$$

igual que antes hemos hecho, en lo esencial. El principio *Abst* puede, pues, ser ampliado de forma que incluya igualmente estos abstractos relacionantes. (Para la mayoría de los desarrollos sucesivos no serán necesarios estos últimos abstractos y, por tanto, necesitaremos sólo el *Abst* restringido anteriormente dado.)

E. Identidad

La relación de identidad tiene un papel tan destacado en los sistemas lingüísticos formalizados que suele ser conveniente adoptar un símbolo para ella como constante predicativa primitiva. En realidad, podríamos emplear el símbolo usual de la indentidad, '=', en lugar del elemento primitivo diádico 'P', por ejemplo, y entonces podríamos escribir '$= x\,x'$' de un modo más familiar como '$x = x'$'. Este sería un modo de introducir la identidad en la estructura de los sistemas lingüísticos en cuestión.

Otro modo de hacerlo es tomar '=' como constante lógica adicional. En la definición anterior de 'fórmula' se introduce entonces una cláusula estipulando que

'$\mathbf{x = y}$'

es una fórmula siempre que **x** e **y** sean términos; y se añaden dos reglas estipulando los *Axiomas de identidad*, o sea:

R7. $\vdash \mathbf{x = x}$,

R8. $\vdash \mathbf{x = y \supset (Fx \supset Fy)}$ [1].

El segundo método tiene quizá la ventaja de ser más explícito gracias a la presencia de *R7* y *R8* como reglas de la lógica subyacente. Los sistemas ampliados que incluyen a *R7* y *R8* son llamados, a veces, lenguajes de primer orden *con inclusión de la identidad*; los emplearemos en capítulos posteriores, de modo que la identidad se manejará siempre, salvo indicación contraria, mediante el segundo método. (Véanse, sin embargo, (VI, A) y (XI, A).)

A partir de *R7* y *R8*, presuponiendo *R1-R6*, *MP*, *Abst* y *Gen*, pueden demostrarse los metateoremas básicos de la teoría de la identidad. A continuación indicamos algunos de ellos [2].

TE1. $\vdash \mathbf{x = y \supset (x = z \supset y = z)}$.

TE2. $\vdash \mathbf{x = y \supset y = x}$.

TE3. $\vdash \mathbf{\sim x = y \supset \sim y = x}$.

TE4. $\vdash \mathbf{x = y \supset (y = z \supset x = z)}$.

TE5. $\vdash \mathbf{x = z \supset (y = z \supset x = y)}$.

TE6. $\vdash \mathbf{\sim x = y \supset (\sim x = z \vee \sim y = z)}$.

En *TE1-TE6*, **x** e **y** pueden tomarse como términos.

En las dos siguientes reglas de identidad, *TE7* y *TE8*, **y** puede ser cualquier término, y **x** cualquier variable que no aparezca en **y**. En *TE9* y *TE10*, **y** puede considerarse como cualquier término, y entonces **x** y **z** serán variables distintas cualesquiera, y **x** no podrá aparecer libre en **y**. Finalmente, en *TE11* y *TE12*, **x** e **y** pueden ser variables distintas cualesquiera.

TE7. $\vdash \mathbf{Fy \equiv (x)\,(x = y \supset Fx)}$.

TE8. $\vdash \mathbf{Fy \equiv (Ex)\,(x = y\ .\ Fx)}$.

TE9. $\vdash \mathbf{(x)\,(\sim x = y \supset Fx) \equiv ((x)\,Fx \vee (\sim Fy\ .\ (x)\,(z)\,(\sim x = z \supset (Fx \vee Fz))))}$.

TE10. $\vdash \mathbf{(Ex)\,(\sim x = y\ .\ Fx) \equiv ((Ex)\,Fx\ .\ (Fy \supset (Ex)\,(Ez)\,(\sim x = z.\ Fx\ .\ Fz)))}$.

TE11. $\vdash \mathbf{(Ex)\,(y)\,(\sim y = x \supset Fy) \equiv (x)\,(y)\,(\sim x = y \supset (Fx \vee Fy))}$.

TE12. $\vdash \mathbf{(x)\,(Ey)\,(\sim y = x\ .\ Fy) \equiv (Ex)\,(Ey)\,(\sim x = y\ .\ Fx\ .\ Fy)}$.

Se dejan las demostraciones al lector.

Tenemos ahora la estructura para una infinidad de sistemas lingüísticos diferentes, dependientes de las constantes individuales, predicativas o funcionales que se tomen como primitivas, y de si '=' se toma o no como elemento primitivo lógico adicional. Sea '*L*' en lo sucesivo una variable que abarque esta infinidad de sistemas. Se conoce a todos los

---

[1] Puede debilitarse *R8* considerablemente, si se desea, exigiendo que **Fx** sea equivalente (por *Abst*) a una fórmula atómica.

[2] Cf. HILBERT y BERNAYS, *op. cit.*, vol. I, pp. 164-77.

lenguajes '*L*' con el nombre de sistemas lingüísticos de primer orden *simples y aplicados*, con o sin inclusión de la identidad.

Hay varios métodos posibles de formular estos lenguajes de primer orden. Pueden, por ejemplo, formularse de modo que contengan un tipo de variable totalmente nuevo, que tome las propiedades o las clases como valores (aunque dicha variable no admitiría la cuantificación). Una formulación que incluya variables de clase es algo más complicada que la que aquí empleamos; un lenguaje de primer orden *simple* es el que no contiene dichas variables, llamándose *no simple* al que las contiene. Un sistema lingüístico de primer orden simple *aplicado* es aquél que es simple y que, (i) contiene al menos una constante predicativa, o (ii) contiene la identidad y como mínimo una constante funcional [1]. Generalmente dichos lenguajes contienen, al menos, una constante predicativa, pero allí donde existe la identidad, los funtores primitivos permiten con frecuencia conseguir idéntico poder expresivo. Todos los sistemas lengüísticos de que trataremos con cierto detalle en este libro son lenguajes simples aplicados de primer orden con o sin inclusión de la identidad en el sentido de (i), o con inclusión de la identidad en el de (ii). La inclusión de constantes individuales primitivas es libre.

Sólo hemos esbozado la estructura lógica de *L*; pero además de los axiomas estipulados por las reglas lógicas *R1-R8*, *L* contendrá algunos axiomas no lógicos y quizá también algunas reglas de deducción no lógicas; estos axiomas y reglas caracterizarán las propiedades, funciones e individuos designados por las constantes primitivas. Daremos después, en el § L y en posteriores capítulos, varios conjuntos diferentes de dichos axiomas y reglas.

F. Descripciones singulares y selectivas

Introduciremos ahora dentro de cualquier *L* dos importantes conceptos: los de descripción *singular* y *selectiva*.

Por descripción selectiva se entiende, en términos generales, una frase de la forma 'cualquier objeto *x* seleccionado o representativo que tenga tal y cual propiedad': frases como ésta son al mismo tiempo *selectivas* y *descriptivas* en el sentido de que seleccionan y describen cierto objeto. Este concepto es importante pero no ha sido muy utilizado por filósofos y metodólogos.

Las descripciones selectivas se introducen por medio de la función ε de Hilbert [2], que puede ser definida contextualmente del modo siguiente.

'(ε x . F x) [A']' abrevia '((Ex) F x . (x) (F x . ⊃ . A))', si A' difiere de A sólo por contener '(ε x . F x)' dondequiera que hubiese apariciones libres de x en A [3].

[1] Cf. A. Church, *op. cit.*, pp. 33-8. La terminología aquí empleada difiere ligeramente de la de Church, así como de la de Hilbert y Ackermann.

[2] Hilbert y Bernays, *op. cit.*, vol. II (Berlín, Springer, 1939), pp. 9-18. Este empleo de 'ε' no debe, naturalmente, confundirse con el del § D anterior, ni con los que se introducen más adelante, en el capítulo VI.

[3] Esta definición se debe en lo esencial al profesor Frederic B. Fitch.

Según esta definición, por ejemplo,

(1) '(εx.Px) [Px' .v. P′ (εx.Px)x']',

es una forma breve de

(2) '(Ex) Px . (x) (Px . ⊃ (Px' .v. P′ xx'))'.

Una expresión como 'ε x.Px' puede leerse: 'cualquier x seleccionado que tenga P'. Puede verse del modo siguiente que esta lectura está quizá justificada: (2) debe, naturalmente, leerse como 'hay al menos un objeto que tiene P, y todo x que tiene P es tal que x' tiene P o que x es soporte de la relación P′ para con x''; si empleamos 'todo' de tal modo que la frase 'todo tal y cual seleccionado' implique la existencia de al menos un tal y cual, entonces (1) puede leerse 'todo objeto seleccionado x que tenga P es tal que Px', o que x es soporte de P′ para con x'', sobreentendiéndose que hay al menos un objeto que tiene P. Este empleo de 'todo' parece, hasta cierto punto al menos, de acuerdo con el habitual.

En una expresión de la forma '(ε **x** . **F x**) [**A**]', la primera aparición por la izquierda de '(ε **x** . **F x**)' es llamada *indicador de afección*. Hemos de hacer notar la causa de la importancia de los indicadores de afección: son necesarios aquí del mismo modo que en la teoría de Russell de las descripciones singulares, que veremos después, y por razones parecidas. Cuando **A** es una proposición de *L*, **F** no contiene variables libres y '~(Ex) **F** x' es verdadera, debemos distinguir con cuidado entre

(3) '(εx.**F**x) [**G**(εx.**F**x)] . ⊃ . **A**'

y

(4) '(εx.**F**x) [**G**(εx.**F**x) . ⊃ . **A**]'.

Porque, si '~(Ex) **F** x' es verdadera, (3) es también verdadera mientras que (4) es falsa; esto se ve si desarrollamos (3) y (4) de acuerdo con la definición: (3) se transforma en

'(Ex) **F**x . (x) (**F**x ⊃ . **G**x) : ⊃ : **A**',

que es verdadera al ser la hipótesis falsa; por otra parte, (4) se transforma en

'(Ex) **F**x . (x) (**F**x : ⊃ : **G**x . ⊃ . **A**)',

que es falsa si '~(Ex) **F** x' es verdadera. Es, pues, esencial distinguir entre (3) y (4) colocando debidamente los indicadores de afección.

Si se utiliza mucho la función ε, es útil la siguiente definición:

'E! (ε **x** . **F x**)' es otra notación posible para '(E **x**) **F x**'.

Decir, por ejemplo, que E! (ε x . Px), es decir que existe al menos un objeto que tiene P.

Los dos metateoremas básicos que gobiernan la función ε son los siguientes:

TF1. ⊢ (Ex) **F**x . ≡ . (εx . **F**x) [**F** (εx.**F**x)].

y

TF2. ⊢ (**x**) **F**x . ≡ . ~(εx.~**F**x) [~**F**(εx.~**F**x)].

Las demostraciones son inmediatas. Estos metateoremas hacen ver, respectivamente, cómo las cuantificaciones existencial y universal pueden expresarse exclusivamente en términos del 'ε' de Hilbert.

Estrechamente relacionado con el concepto de descripción selectiva

está el de descripción singular [1]: ésta es, hablando *grosso modo*, una frase de la forma 'el tal y cual' o 'el único tal y cual'. Dentro de *L*, y en caso de que éste incluya la identidad, puede introducirse una notación para las descripciones singulares del modo siguiente:

'$(\imath x.Fx)$ [A']' abrevia '$((\varepsilon x.Fx)$ [A]. (x) (y) (Fx . Fy : $\supset$: x = y)),' si x e y son variables distintas y A' sólo difiere de A por contener apariciones de '$(\imath$ x . Fx$)$' siempre y sólo donde A contiene apariciones de '$(\varepsilon$ x . Fx$)$'.

La expresión '$(\imath x.Px)$', por ejemplo, puede leerse 'el único *x* que tiene P'. Los indicadores de afección se necesitan aquí del mismo modo que antes, en el caso de las descripciones selectivas.

Si se utilizan mucho las descripciones singulares, es también útil la siguiente definición.

'E! $(\imath x.Fx)$' en lugar de '(Ey) (x) (x = y . $\equiv$. Fx)', en donde x e y son variables distintas.

Los teoremas básicos referentes a las descripciones singulares pueden indicarse así:

TF3. $\vdash$ E!$(\imath x.Fx) :\equiv: (Ex)\ Fx\ .\ (x)\ (y)\ (Fx\ .\ Fy : \supset : x \equiv y)$, siendo x e y variables distintas.

TF4. $\vdash (\imath x.Fx)$ [A'] $:\equiv:$ E! $(\imath x.Fx).$ (x) (Fx . $\supset$. A), si A' difiere de A sólo por contener '$(\imath x.Fx)$' dondequiera que haya apariciones libres de x en A.

TF5. $\vdash (\imath x.Fx)$ [$(\imath y.Gy)$ [A]] . $\equiv$. $(\imath y.Gy)$ [$(\imath x.Fx)$ [A]], si x e y son variables distintas.

Las descripciones singulares son útiles sobre todo como medio de introducir constantes individuales. Supongamos que *L* no contiene constantes individuales primitivas, y que los axiomas de *L* son tales que aseguran la existencia de un objeto *x*, y sólo uno, tal que ---*x*---; podemos entonces definir

'ā' como '$(\imath x$. ---*x*---$)$'.

Luego si *L* no contiene primitivamente constantes individuales, pueden introducirse éstas por medio de descripciones, si se dispone de las constantes predicativas necesarias. E inversamente, si contiene constantes individuales como elementos primitivos, éstas pueden ser eliminadas en cuanto tales elementos y definirse por medio de descripciones (si se dispone de las constantes predicativas necesarias). Estos importantes hechos nos permiten ver que un lenguaje *L* que contenga constantes individuales primitivas puede ser transformado fácilmente en un *L'* que no las contenga, y viceversa, en las debidas circunstancias.

Utilizando la identidad, las descripciones singulares y los abstractos de grado superior, podemos también eliminar —si concurren circunstancias oportunas— las constantes *funcionales* como elementos primitivos

[1] Cf. WHITEHEAD y RUSSELL, *op. cit.*, vol. I, pp. 172-86. También HILBERT y BERNAYS, *op. cit.*, vol. I, pp. 383 y siguientes. Sobre la importancia filosófica de la teoría de la descripción, véase, entre otros, B. RUSSELL, *Introduction to Mathematical Philosophy* (George Allen and Unwin, London, 1919), pp. 167-80 [versión castellana: *Introducción a la Filosofía Matemática*, Losada, Buenos Aires, 1945, pp. 235-51 (*T.*)].

de L. Supongamos que Q es una constante predicativa, primitiva o definida, $(n + 1)$ - ádica de L y que

$$\vdash (x_1) \ldots (x_{n+1})\ (x_{n+2})\ (Qx_1x_2 \ldots x_{n+1} \cdot Qx_{n+2}x_2 \ldots x_{n+1} :\supset: x_1 = x_{n+2}),$$

y que

$$\vdash (x_1) \ldots (x_n)\ (\mathrm{E}x_{n+1})\ Q\, x_{n+1}x_1 \ldots x_n.$$

Podemos entonces definir

'$(\lambda x_1 \ldots x_n . Q)$' como '$yx_1 \ldots x_n \exists Qyx_1 \ldots x_n$'.

Pero a su vez una constante funcional n-ádica, digamos '$\mathbf{f}$', puede ser considerada como una abreviación de

'$(\lambda x_1 \ldots x_n . Q)$',

y el término

'$\mathbf{f}y_1 \ldots y_n$' puede, pues, abreviar '$(\imath x_{n+1} \cdot \mathbf{f}x_{n+1}y_1 \ldots y_n)$'.

Luego se pueden eliminar las constantes funcionales como elementos primitivos de L —en las debidas circunstancias— e introducirlas por medio de estas definiciones.

Puesto que, como acabamos de ver, las constantes individuales y funcionales pueden siempre eliminarse como elementos primitivos (si se dan las circunstancias pertinentes) sin pérdida de poder expresivo, estaremos justificados en muchas de nuestras posteriores investigaciones si dedicamos sólo nuestra atención a aquellos lenguajes L que no las contengan primitivamente.

G. Formas normales

Hay dos teoremas referentes a los sistemas lingüísticos L que serán particularmente útiles para nuestras investigaciones semánticas: son los que nos dicen que las fórmulas de L pueden llevarse a ciertas *formas normales* típicas. Aunque no son las únicas formas normales, como es lógico, las dos que nos serán en lo sucesivo de especial utilidad son un tipo de forma normal *conyuntiva* y la forma normal *prenexuada* [1].

Llamemos *proposición universal atómica* [2] a toda fórmula de L del tipo '(x) A', en la cual A no contenga ninguna variable libre distinta de x, y que pueda contener o no a x misma como variable libre. Tal proposición es universal debido a la presencia del cuantificador universal; pero es también atómica en el sentido de que puede entrar, por medio de la negación y de la disyunción, en la composición de fórmulas moleculares más largas. Por ejemplo, '(x) A' puede ser considerada como parte universal atómica de '$\sim$(x) A $\supset$ B'.

Podemos suponer por ahora que L no contiene constantes individuales primitivas, de suerte que toda *proposición* de L contendrá un cuantificador y, o bien será una proposición universal atómica, o bien estará construida a partir de éstas por medio de '$\sim$' y 'v' del modo apropiado. Dada cualquier proposición C de L podemos, pues, construir determinada

---

[1] Cf., p. ej., Hilbert y Ackermann, *op. cit.*, pp. 10-11 y p. 67. [en la versión española citada, las pp. 25-6 y 111 *(T.)*], o A. Church, *op. cit.*, pp. 59-61].

[2] Recuérdese nuestra nota del capítulo I, § F *(N. de los T.)*.

proposición a partir de las proposiciones universales atómicas que la constituyen del modo siguiente: sean $\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n$ las proposiciones atómicas universales que constituyen **C**; y sea $\mathbf{B}_i$, o bien $\mathbf{A}_i$, o bien '$\sim\mathbf{A}_i$' ($1 \leqq i \leqq n$); entonces, formamos varias disyunciones de las proposiciones **B** y, finalmente, una conyunción de dichas disyunciones. Se dirá que toda conyunción de disyunciones de proposiciones universales atómicas o sus negaciones está en *forma normal conyuntiva especial.*

Un teorema referente a esta forma normal conyuntiva es el siguiente: dada cualquier fórmula **C** de *L* que no contenga variables libres, existe una fórmula **D** en la forma normal conyuntiva especial tal que $\vdash \mathbf{C} \equiv \mathbf{D}$.

La demostración se vale únicamente de teoremas de la lógica de funciones veritativas.

Consideremos uno o dos ejemplos. Sean $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ proposiciones universales atómicas. Consideremos la fórmula

(1) '$(((\mathbf{A}_1 \supset (\mathbf{A}_2 \supset \mathbf{A}_3)) \,.\, \mathbf{A}_1 \,.\, \mathbf{A}_2) \supset \mathbf{A}_3$'.

Mediante las debidas transformaciones, en las que empleamos ciertas consecuencias de *R1-R4*, puede hacerse ver que es equivalente a

(2) '$(\mathbf{A}_1 \vee \sim\mathbf{A}_1 \vee \sim\mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_3) \,.\, (\mathbf{A}_2 \vee \sim\mathbf{A}_1 \vee \sim\mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_3) \,.\, (\sim\mathbf{A}_3 \vee \sim \mathbf{A}_1 \vee \sim\mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_3)$'.

Obsérvese que (2) está en forma normal conyuntiva especial. *Pari passu*,

'$(\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \sim\mathbf{A}_1) \,.\, (\sim\mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_2 \vee \sim\mathbf{A}_1) \,.\, (\sim\mathbf{A}_2 \vee \sim\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_1) \,.\, (\mathbf{A}_1 \vee \sim\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2)$'

está en forma normal conyuntiva especial y es equivalente a

'$(\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2) \supset (\sim\mathbf{A}_2 \supset \sim\mathbf{A}_1)$'.

Otra importante forma normal es la llamada forma normal prenexuada, que se refiere a la cuantificación. Una fórmula **C** de *L* está en forma normal prenexuada si es de la forma

(3) '$(\mathrm{C}\mathbf{x}_1)\ (\mathrm{C}\mathbf{x}_2) \ldots (\mathrm{C}\mathbf{x}_n)\ \mathbf{A}$',

donde cada '$(\mathrm{C}\mathbf{x}_i)$' es, o bien '$(\mathbf{x}_i)$', o bien '$(\mathrm{E}\mathbf{x}_i)$' (para $1 \leqq i \leqq n$), **A** no contiene cuantificadores, y $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son variables distintas que aparecen libres en **A**.

El *Teorema de la forma normal prenexuada* es el siguiente:

Dada cualquier fórmula **C** de *L* que no contenga variables libres, existe una fórmula **D** de *L* en forma normal prenexuada tal que $\vdash \mathbf{C} \equiv \mathbf{D}$. La demostración requiere sobre todo ciertas leyes elementales de cuantificación. Por ejemplo, es fácil mostrar que la fórmula

'$(\mathbf{x})\ (\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathrm{E}\mathbf{y})\ \mathbf{C}_1 \supset (\mathrm{E}\mathbf{z})\ \mathbf{C}_2)$'

tiene como forma normal prenexuada

'$(\mathrm{E}\mathbf{x})\ (\mathbf{y})\ (\mathrm{E}\mathbf{z})\ ((\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset (\mathbf{C}_1 \supset \mathbf{C}_2))$'

siempre que **x** no esté libre en $\mathbf{C}_1$ ni $\mathbf{C}_2$, y no lo esté en **A**, **B** ni $\mathbf{C}_2$, ni **z** en $\mathbf{C}_1$, **A** ni **B**. Y, bajo las mismas condiciones,

'$(\mathrm{E}\mathbf{x})\ (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset (\mathbf{y})\ (\mathbf{C}_1 \supset (\mathrm{E}\mathbf{z})\ \mathbf{C}_2)$'

tiene como forma norma prenexuada

'$(\mathbf{x})\ (\mathbf{y})\ (\mathrm{E}\mathbf{z})\ ((\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) \supset (\mathbf{C}_1 \supset \mathbf{C}_2))$'.

En ambos ejemplos, **x**, **y** y **z** deben considerarse variables distintas.

Obsérvese que las definiciones aquí dadas no requieren que estas formas normales sean únicas. Por el contrario, dada cualquier proposición

de *L*, puede haber varias fórmulas en forma normal conyuntiva o prenexuada equivalentes a ella.

Ambas formas normales van a sernos útiles más tarde para la definición del concepto semántico de verdad para *L*. En el caso de la forma normal prenexuada creemos útil requerir también que el primer cuantificador por la izquierda de una fórmula en forma normal prenexuada sea un cuantificador universal, lo cual puede siempre lograrse fácilmente. Supongamos que el primer cuantificador izquierdo, '(Cx_1)', es '(Ex_1)', y que se dispone de '='; formamos entonces a partir de la fórmula (3), en forma normal prenexuada, la fórmula

$$'(x_{n+1})\ (Ex_1)\ (Cx_2)\ \ldots\ (Cx_n)\ (A\ .\ x_{n+1} = x_{n+1})'.$$

Es evidente que ésta fórmula equivale a (3), tomando x_{n+1} como nueva variable. De este modo podemos admitir sin perder generalidad que el primer cuantificador por la izquierda de toda fórmula en forma normal prenexuada es un cuantificador universal.

H. Campos de individuos

Volvámonos ahora a unas consideraciones de carácter algo menos técnico.

Una de las principales características que determinan que un sistema lingüístico *L* sea de primer orden, consiste en que, como hemos visto, se considera que sus variables abarcan un sólo tipo de objetos, llamados *individuos*. Como es lógico, el margen acerca de lo que puede ser considerado individuo es amplísimo: la totalidad de los puntos espacio-temporales, la totalidad de los números naturales, la totalidad de los protones y los electrones, la totalidad de los seres humanos, etcétera, pueden tomarse como elementos de un campo de individuos para un *L* apropiado. Pero también los objetos de tipo más 'abstracto' pueden ser tomados como individuos: la totalidad de los números reales, la de los números reales junto con todas las clases o funciones de los números reales, la totalidad de los objetos de la teoría de conjuntos, la totalidad de los objetos artísticos (en cierto sentido preciso) etc., pueden considerarse adecuadamente como constituyentes del campo de individuos de un *L* debidamente formulado. En realidad, absolutamente cualquier tipo de entidad puede tomarse como campo de individuos, con la única condición de que constituya una totalidad claramente definida y delimitada.

Lo que aquí se llama 'campo de individuos' se denomina a veces, en las obras más antiguas, 'universo del discurso'; el empleo de 'ontología' que hace Quine es aproximadamente equivalente. Aquí, sin embargo, preferimos hablar del campo *(Bereich)* de individuos de un sistema lingüístico, por ser ésta la terminología que con más frecuencia emplean los lógicos matemáticos.

Es útil para ciertos fines distinguir entre individuos en sentido *amplio* e individuos en sentido *estricto*. Estos últimos pueden ser definidos como objetos del tipo inferior en un sistema formal basado en la teoría simplificada de los tipos, siendo los objetos de tipo más alto

individuos en sentido amplio (véase el capítulo VI, §§ C-G); sin embargo, de este modo únicamente puede establecerse la distinción para los lenguajes basados en la citada teoría, y lo que queremos es una distinción que pueda ser establecida igualmente para otras clases de sistemas formales. Podría intentarse describir la diferencia a partir de términos tales como 'abstracto' y 'concreto', pero esto sería de escasa utilidad, puesto que también éstos necesitan aclaración. Una diferencia útil y muy importante es la siguiente: algunos campos de individuos son, o bien *finitos*, o bien *infinitos pero numerables*; otros son *no numerables* [1]. (Un campo de individuos de un lenguaje puede ser numerable o no numerable sin que *en el interior* del propio lenguaje seamos capaces de *demostrar* que esto sucede: el que pueda o no demostrarse depende en parte del alcance del lenguaje estudiado; pero si un campo de individuos es numerable, debemos al menos ser capaces de mostrar o demostrar que lo es dentro de un metalenguaje sintáctico o semántico. Véanse, más adelante, los §§ I-J.) Se puede, por lo tanto, hablar de un individuo en sentido *estricto* o *restringido* como miembro de un campo de individuos a lo sumo numerable, y de individuos en sentido *amplio* o *ampliado* como miembros de un campo no numerable; de acuerdo con esto, hablaremos con frecuencia de un lenguaje de primer orden en sentido estricto o restringido, dando a entender con ello que se trata de un lenguaje de primer orden cuyo campo fundamental es a lo sumo numerable; y, análogamente, podemos hablar de un lenguaje de primer orden en sentido amplio o ampliado refiriéndonos a uno cuyo campo fundamental sea no numerable.

Todos los lenguajes *L* son lenguajes de primer orden con o sin inclusión de la identidad, bien en sentido estricto, bien en sentido amplio. *Siempre que exista la posibilidad de elección, un L de primer orden en sentido estricto es preferible a uno en sentido amplio.* Las razones de esta preferencia se detallarán más tarde en la discusión del constructivismo de primer orden. (Véase el capítulo XIII.)

Podría pensarse que el confinarnos en los lenguajes de primer orden, ya sean finitos, numerables o no numerables, nos limita excesivamente, y que con ello descuidamos algunas clases de sistemas lingüísticos de gran importancia. Es perfectamente sabido, sin embargo, que no sucede así: la mayoría de los sistemas lingüísticos importantes (del tipo clásico) han sido formulados *ab initio* como lenguajes de primer orden, o bien pueden ser fácilmente formulados de nuevo como tales. En cuanto a los lenguajes que normalmente se considerarían de orden superior, tales como los basados en la teoría simplificada de los tipos o en la teoría zermeliana de conjuntos, no los descuidaremos en este trabajo. (Véase el capítulo VI.)

Los lenguajes de primer orden anteriormente esbozados son tales que contienen un solo género de variable, pero esto no es en absoluto esencial: puesto que el campo fundamental de un lenguaje se compone de individuos de clases diversas, quizá mutuamente excluyentes, es

---

[1] Un campo de objetos *numerable* es, en términos generales, aquél cuyos objetos pueden hacerse corresponder uno a uno con el conjunto de los números naturales, y un campo *no numerable* es un campo infinito para el cual no existe dicha correspondencia.

conveniente muchas veces emplear más de un género de variables[1]. Algunos de los metalenguajes de primer orden de que trataremos más tarde contienen dos géneros distintos: debe considerarse que cada género de variables abarca un tipo de entes apropiado; y el campo fundamental del lenguaje se compone de todos estos entes juntos. El disponer de géneros separados de variables nos ayuda conceptualmente a mantener separados los dos tipos de objetos; sin embargo, no es nada esencial formalmente tener los dos tipos de variables, y—si se quiere—siempre es posible volver a formular el lenguaje de modo que contenga un tipo único (véase (IV,B).)

Si L contiene dos géneros de variables, hay que hacer algún ligero cambio en lo anterior: las definiciones de 'fórmula' y 'término' deben ser tales que incluyan estos dos géneros; en lugar de *R5* necesitamos ahora dos reglas, una para cada género de variables, y análogamente para *R6* y *Gen*, para *Abst* y para *R7* y *R8*. Estos cambios no ofrecen dificultad.

I. Lenguaje objeto y metalenguaje

Con frecuencia, el campo de individuos de L se considera compuesto de objetos de carácter no lingüístico, y posiblemente sean de este tipo la mayoría de los lenguajes científicos y filosóficos. Pero en un segundo tipo de discurso se querrá tal vez hablar, no sólo de objetos no lingüísticos, sino también de las propias palabras, frases, proposiciones, etc., que comprende dicho discurso. O también, en un tercer tipo, se hablaría *únicamente* de las expresiones de un lenguaje y no de los objetos a los que éstos se refieren.

Un lenguaje que debe ser formulado, analizado, investigado o descrito de un modo u otro dentro de un contexto dado es llamado *lenguaje objeto* (habitualmente, aunque no siempre, los objetos de que habla este lenguaje no son lingüísticos). Los lenguajes de los otros dos tipos mencionados se llaman *metalenguajes*, y, en particular, metalenguajes de o con respecto a un lenguaje objeto dado [2]. En un metalenguaje de L puede hablarse de las expresiones (lingüísticas) de L, y posiblemente también de los objetos de que habla el mismo L; dado un metalenguaje de L, en el metalenguaje *de aquél* puede hablarse, a su vez, acerca de las expresiones lingüísticas del primer metalenguaje, y quizá también de los objetos, lingüísticos o de otro tipo, de los cuales habla; de este modo se llega a toda una jerarquía de lenguajes: el lenguaje que está situado más bajo en la jerarquía es generalmente el lenguaje objeto; a continuación viene su metalenguaje, después su meta-metalenguaje (es decir, el metalenguaje del metalenguaje); luego el meta-meta-metalenguaje, etc. No existe un límite superior de jerarquía,

[1] Véanse A. Schmidt, «Ueber deductive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen», *Mathematische Annalen*, 115 (1938), pp. 485-506; y H. Wang, «Logic of Many-Sorted Theories», *The Journal of Symbolic Logic*, 17 (1952), pp. 105-116.

[2] Cf. especialmente R. Carnap, *The Logical Syntax of Lenguaje* (Kegan Paul, London, 1937), pp. 1-9.

puesto que dado un lenguaje de cualquier nivel siempre existe un lenguaje de nivel inmediato superior como metalenguaje suyo; pero en la práctica podemos habitualmente limitar nuestro discurso a lenguajes de dos o tres niveles; algunos estudios utilizan al menos cuatro, pero esto no es lo usual.

En los parágrafos precedentes, §§ A-G, tomamos *L* como lenguaje objeto. Al hablar de los signos y expresiones de *L* hemos utilizado como metalenguaje un lenguaje estrechamente emparentado con el castellano corriente; mas, en realidad, este metalenguaje se parecía mucho sólo a una parte muy pequeña del castellano: cada frase de los §§ A-G podría, sin duda, traducirse al castellano básico, es más, a una parte realmente reducida de éste [1]; y en dos o tres ocasiones empleamos frases meta-metalingüísticas para enunciar algo acerca de la notación del metalenguaje (el meta-metalenguaje estaba también muy cercano a una porción reducidísima del castellano).

La mayoría de los sistemas lingüísticos formalizados que han sido estudiados con detalle a través de las publicaciones sobre lógica moderna se han tomado como lenguajes objeto en el sentido descrito. La naturaleza del metalenguaje, como en la formulación anterior de *L*, queda por lo general imprecisa: no siempre se sabe de un modo claro y preciso qué modos de expresión se permite contener al metalenguaje. Muchos lógicos emplean metalenguajes de gran alcance, que contienen medios de expresión de múltiples posibilidades: en realidad, lenguajes tan poderosos que llegan a contener la mayor parte de las matemáticas (los cuales han desempeñado un importante papel histórico).

Pero es también interesante considerar metalenguajes de menor alcance, cuyos medios de expresión sean sumamente limitados; en este libro trataremos fundamentalmente de ellos. Cuando se emplea un metalenguaje poderoso, que contiene virtualmente toda la matemática, no es necesario una formalización explícita: existen varios medios de formalizar las matemáticas, y se puede simplemente escoger uno conveniente. Pero cuando el metalenguaje ha de estar seriamente limitado en cuanto a medios de expresión, es esencial saber con exactitud qué conceptos, qué axiomas, modos de deducción, etc., están permitidos; en este caso, formalizar el metalenguaje con todo cuidado tiene la máxima importancia.

J. Sintaxis y semántica

En el párrafo anterior hemos distinguido dos tipos de metalenguaje. Dado un lenguaje objeto *L*, un metalenguaje puede ser un lenguaje en el cual hablemos exclusivamente de las expresiones lingüísticas de *L*: éste sería un metalenguaje de *L* en el primer sentido. O bien podemos tener un metalenguaje de *L* en el segundo sentido, que comprenda modos de hablar no sólo acerca de las expresiones lingüísticas de *L*, sino también acerca de los objetos sobre los cuales *L* a su vez habla.

[1] Véase C. K. Ogden, *Basic for Science* (Kegan Paul, London, 1942).

El primer tipo de metalenguaje, en el cual se habla exclusivamente de expresiones lingüísticas, es llamado habitualmente *lenguaje de sintaxis* o *metalenguaje sintáctico* de *L*, y un lenguaje del segundo tipo es llamado *metalenguaje semántico* de *L*[1]. Un metalenguaje sintáctico o semántico puede ser, naturalmente, rico o pobre en modos de expresión; puede incluir o no una lógica de gran alcance a modo de subestructura; puede contener o no axiomas o reglas de deducción complicados. Para cualquier *L* hay varios tipos diferentes de metalenguajes sintácticos y semánticos de *L*. Y en un metalenguaje muy poderoso de *L*, deben poder demostrarse enunciados sobre *L* que serían indemostrables en un metalenguaje restringido.

Esta caracterización de 'sintaxis' y 'semántica' es muy tosca y sólo aproximada. Más tarde aparecerá una caracterización más precisa a partir de la formulación de metalenguajes sintácticos y semánticos concretos.

Ya hemos señalado que todos los sistemas lingüísticos de que trataremos con cierto detalle, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes, serán de primer orden. Los lenguajes objeto pueden tomarse en sentido amplio o estricto; en cuanto a los *metalenguajes sintácticos* que vamos a estudiar, se tomarán siempre en sentido *estricto*. Nuestra finalidad es en parte mostrar cómo es posible construir metalenguajes *semánticos* en sentido *estricto* incluso cuando los lenguajes objeto (en sus interpretaciones habituales) son lenguajes de primer orden en sentido *amplio* (los detalles se dan en los capítulos VIII-IX). Como preliminar a la formulación de metalenguajes semánticos de este tipo muy restringido, trataremos de metalenguajes semánticos que son del tipo estricto si y sólo si los lenguajes objeto a que se refieren lo son también (capítulos IV-VII). Aunque los lenguajes objeto considerados en toda la obra pueden consistir en cualquier sistema apropiado de primer orden, intentamos restringir los metalenguajes semánticos tanto como sea posible.

K. Signos sucesos y signos figuras

Otra distinción que en lo sucesivo manifestará ser importante es la que existe entre lo que Peirce llamó *tipos* y *prendas* [*types* and *tokens*], llamado ahora con más frecuencia *signos figuras* (o *formas)* y *signos sucesos* (o *inscripciones)*[2] Hasta ahora hemos hablado de las expresiones de *L*, pero no hemos especificado en modo alguno qué se supone que son estas expresiones. Hemos hablado también de los *símbolos* de un lenguaje *L:* los símbolos son posiblemente las unidades mínimas —elementos o letras—de un lenguaje, y las expresiones son, pues,

[1] Este empleo es fundamentalmente el de Tarski y Carnap. Véanse A. Tarski, *op. cit.*, y R. Carnap, *Introduction to Semantics* (Harvard University Press, Cambridge, 1942), pp. 8-15.

[2] Cf. C. S. Peirce, *Collected Papers* (Harvard University Press, Cambridge, 1931-1935), especialmente tomo II, §§ 245-6, y tomo IV, § 537; y R. Carnap, *Introduction to Semantics*, pp. 4-8.

series finitas de ellos. Pero 'símbolo' y 'expresión' son igualmente ambiguos. Consideremos primero 'símbolo': un símbolo puede ser una aparición concreta en el espacio y el tiempo, o bien puede ser una clase de tales apariciones, todas suficientemente semejantes entre sí. En el primer caso llamamos al símbolo un *símbolo suceso;* en el segundo, un *símbolo figura.* Los símbolos sucesos son, sin duda, apariciones reales de cierto tipo dentro del mundo espacio-temporal; son singulares y concretas, ocupan una cierta porción del espacio y del tiempo, y no son nada más. Un símbolo figura, en cambio, es una entidad de tipo completamente distinto: es una entidad abstracta en el sentido de que puede concretarse en casos particulares. Por ejemplo, el símbolo figura 'a' se ejemplifica en una marca de tiza o de tinta (individual, concreta, quizá visible) en cierta región espacio-temporal determinada. Tal vez el mejor modo de declarar los símbolos figuras sea haciéndolos clases de símbolos sucesos; pero, naturalmente, no debe entenderse que *cualquier* clase de éstos comprenda un símbolo figura: como ya hemos apuntado, los miembros de un símbolo figura deben todos ser suficientemente semejantes entre sí, de formas, tamaños, etc., parecidos (de momento no es necesario determinar exactamente lo que aquí entendemos por «suficientemente semejante»).

Análogamente, una *expresión* puede ser explicada como una serie de símbolos sucesos tomados en cierto orden, en cuyo caso las expresiones ocupan también espacio y tiempo, son concretas, etc.; pero también podemos hablar de expresiones que sean entidades abstractas concretables en casos particulares. Se pueden distinguir los dos sentidos de 'expresión' sin más que hablar de expresiones sucesos y expresiones figuras; sin embargo, no es necesario multiplicar de este modo nuestro vocabulario, y nos referiremos a símbolos sucesos o expresiones sucesos como *signos sucesos*, y a las expresiones o símbolos figuras como *signos figuras.*

He aquí, pues, dos criterios completamente distintos acerca de la naturaleza de signos y expresiones. El criterio según el cual los signos deben ser entendidos como signos figuras es el llamado punto de vista *clásico*, que lo es en dos sentidos: (1) la sintaxis y la semántica se formularon primeramente según esta perspectiva, y (2) ésta entiende las expresiones como *clases* de objetos. El criterio según el cual los signos deben entenderse como signos sucesos es el punto de vista *inscriptivo* o *nominalista*, que al parecer proviene de Lesniewski, pero sólo ha sido tratado de un modo sistemático recientemente por Goodman y Quine. Naturalmente, se puede también adoptar un punto de vista mixto considerando los signos, para ciertos fines según una perspectiva, para otros fines según la otra; en una semántica o una sintaxis de este tipo mixto serán necesarias posiblemente variables que abarquen signos sucesos así como variables de clase que abarquen signos figuras (cf. el capítulo XII, § G).

En este libro formularemos primeramente la sintaxis y la semántica de acuerdo con el punto de vista clásico (III-X); pero después (XI-XII) haremos ver que cabe nominalizar la sintaxis y la semántica sin pérdida sustancial de alcance.

L. Algunos lenguajes objeto de primer orden

Antes de abordar nuestra tarea principal, el estudio detallado de ciertos metalenguajes sintácticos y semánticos de primer orden, echemos una breve ojeada a ciertos sistemas lingüísticos muy conocidos que pueden tomarse como lenguaje objeto. Sólo escogemos unos pocos de estos lenguajes a modo de ejemplo; cada uno de ellos será un *L* con las reglas no lógicas apropiadas.

Los primeros ejemplos son dos sistemas estrechamente emparentados con los sistemas formulados por Hilbert y Bernays para parte de la teoría de números elemental (tienen un interés especial para la demostración de la compatibilidad de dicha teoría). El primer sistema, (A), contiene los siguientes elementos primitivos [1]:

Constantes lógicas: 'v', '$\sim$', '(', ')', 'β', '='.
Constante predicativa: '$<$'.
Constante individual: 'o'.
Constante funcional: 'σ'.
Variables: 'x', 'x'', 'x''', ...

Debe considerarse que '$<$' representa la relación '*ser menor que*' (entre números naturales), 'o' el número natural *cero*, y 'σ' la función '*ser el sucesivo de*' un número natural (de suerte que σx sea el sucesivo de x). Las variables abarcan números naturales. Las definiciones de 'fórmula' y 'término' pueden darse de modo no formalizado, como en (II, A). Otras constantes lógicas son definibles por *D1-D4*, como en (II, A). Las *Reglas lógicas* nos las proporcionan *R1-R8* y *Abst.* Las *Reglas no lógicas* son como sigue:

A1. $\vdash x < x' \,.\, x' < x'' : \supset : x < x''$.
A2. $\vdash \sim x = x' : \supset : x < x' \,.\, \mathrm{v} \,.\, x' < x$.
A3. $\vdash x < \sigma x$.
A4. $\vdash x < x' \,.\, \supset \,.\, \sim x' < \sigma x$.
A5. $\vdash \sim x < \mathrm{o}$.
A6. $\vdash \sim x = \mathrm{o} \,.\, \supset \,.\, (\mathrm{E}x')\sigma x' = x$.

Las Reglas de deducción son *MP* y *Gen.* (Obsérvese aquí, incidentalmente, que *R7* es demostrable por *A2-A4* y que, por tanto, puede no incluírsela entre las reglas lógicas.)

El segundo ejemplo es en lo esencial el famoso sistema (Z) de Hilbert-Bernays [2]. Las constantes lógicas son aquí las mismas que en (A). No hay *constantes predicativas* no lógicas primitivas; 'o' es la única constante individual primitiva, y 'σ', '$+$' y '$\times$' son las constantes funcionales primitivas. Las variables 'x', 'x'', etc., abarcan números naturales, como en (A); 'o' designa el número natural cero, y 'σ', '$+$' y '$\times$' representan respectivamente las funciones de la aritmética elemental sucesivo, adición y multiplicación. Las reglas comprenden, además de las reglas lógicas análogas a las de (A), las siguientes:

Z1. $\vdash \sim \sigma x = \mathrm{o}$.
Z2. $\vdash \sigma x = \sigma x' \,.\, \supset \,.\, x = x'$.
Z3. $\vdash x + \mathrm{o} = x$.

[1] Cf. D. Hilbert y P. Bernays, *op. cit.*, vol. I, p. 263.
[2] *Ibíd.*, p. 371.

Z4. $\vdash x + \sigma x' = \sigma(x + x')$.
Z5. $\vdash x \times 0 = 0$.
Z6. $\vdash x \times \sigma x' = (x \times x') + x$.
Z7. $\vdash \mathbf{F}0 \,.\, (x)(\mathbf{F}x \,.\supset.\, \mathbf{F}\sigma x) :\supset: \mathbf{F}x$.

Z1, *Z2* y *Z7* son formas de los *Postulados de Peano*, y *Z3-Z6* son las llamadas *ecuaciones recurrentes* para la adición y la multiplicación; *Z7* es un principio de *inducción matemática*. La teoría matemática caracterizada por estos axiomas es la llamada generalmente *teoría elemental de números*.

Carnap ha estudiado recientemente con fines metodológicos varios tipos de lenguajes de primer orden. Los sistemas $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ..., $\mathfrak{L}_\infty$, discutidos en *Logical Foundations of Probability*, por ejemplo, están estrechamente relacionados con lenguajes de primer orden que podemos describir en términos generales como sigue [1]. Los elementos primitivos comprenden las constantes lógicas (como anteriormente), un número infinito de constantes predicativas primitivas, cada una de un grado finito que se especifica (tales como 'azul', 'más cálido', etc.) y un número finito o numerable de constantes individuales, junto con variables; la lógica presupuesta es esencialmente la que proporcionan *R1-R8*, *MP*, *Gen* y *Abst*, a los cuales se añaden axiomas no lógicos apropiados; finalmente, cada $\mathfrak{L}_n$ es un sistema cuyo campo fundamental contiene exactamente n individuos, mientras que $\mathfrak{L}_\infty$ contiene una cantidad de individuos numerable.

Otra variedad de sistema de primer orden estudiada por Carnap es el lenguaje coordenado $\mathfrak{L}'$[1]. Se supone que los individuos de este lenguaje poseen un orden básico fijo, análogo al de los números naturales en orden de magnitud creciente: los individuos pueden considerarse como *posiciones* en un sistema coordenado. En caso de que se quiera disponer de la aritmética de los números naturales en semejante sistema, son necesarios dos tipos diferentes de constantes predicativas primitivas: el primero expresa propiedades de los números en cuanto tales; el segundo, propiedades de los números en tanto que posiciones. Por ejemplo, si 'Prim' es una constante predicativa primitiva que representa la propiedad de ser un número primo, 'Prim 3' puede establecer que el número 3 es primo. Mientras que si 'Azul' es otra constante predicativa primitiva, 'Azul 3' puede significar que la posición cuya coordenada es 3 es azul. La lógica subyacente a dicho lenguaje es en lo esencial igual a lo anterior, y los axiomas no lógicos que se requieren incluyen enunciados que estipulan el orden básico de los individuos (cuando éste no se obtiene directamente por una elección adecuada de la notación primitiva).

Se presumirá que ciertas zonas de la teoría científica son formalizables en cada uno de los lenguajes $\mathfrak{L}_n$, $\mathfrak{L}_\infty$ o $\mathfrak{L}'$. Los elementos primitivos deben elegirse de suerte que aseguren la definibilidad de los términos básicos y los conceptos de la ciencia estudiada. A pesar de la reducida estructura lógica subyacente, los sistemas lingüísticos de este tipo pueden ser sorprendentemente ricos en modos de expresión.

---

[1] R. CARNAP, *Logical Fundations of Probability*, pp. 52-70; y *Meaning and Necessity*, p. 75 y pp. 78-81.

Los sistemas de Hilbert-Bernays y de Carnap que hemos mencionado son todos lenguajes de primer orden en sentido estricto, en los cuales se admite que el campo fundamental de individuos es, a lo sumo, infinito, pero numerable; cada uno de ellos pretende permitirnos formalizar ciertas zonas de la *ciencia*. El sistema constructivo de Goodman [1] nos ofrece un interesante ejemplo de sistema lingüístico de primer orden (también en sentido estricto) y *filosófico*: podemos describirle muy por encima como sigue. Siguiendo a C. I. Lewis, se entiende por *quale* un carácter o cualidad presenciales, en tanto que opuestos a una propiedad o «universal lógico» [2]. Goodman entiende 'quale' en un sentido amplio, de suerte que incluya lugares y tiempos, pero no tamaños ni formas. Para Goodman, el campo fundamental de objetos se compone de qualia junto con entidades que tienen al menos un quale como parte: los individuos básicos son, dicho de otro modo, qualia junto con sumas de ellos. La lógica de primer orden subyacente se complementa con un cálculo de individuos que se refiere a los conceptos de imbricación de individuos, relación parte-todo entre individuos, sumas y productos de éstos, etcétera. Puede formalizarse este cálculo de forma que no presuponga otros conceptos lógicos que los de un lenguaje de primer orden; cabe tomar como constantes lógicas las anteriores (en rigor, la identidad no es necesaria como constante lógica primitiva, puesto que es definible a base de los otros elementos primitivos). Las constantes predicativas primitivas incluyen cuatro símbolos de relación diádica, si bien Goodman hace ver que tres de ellos pueden ser sustituidos por uno solo; una especificación completa del sentido de estas constantes primitivas requiere considerables explicaciones preliminares y aquí no es necesaria; solamente diremos que las constantes predicativas toman como argumentos qualia y sumas de éstos, y que Goodman sólo considera de pasada el problema de dar axiomas no lógicos adecuados para caracterizar los conceptos que implican dichas constantes primitivas. Su sistema está, pues, sólo parcialmente formalizado; pero es verosímil que puedan darse axiomas compatibles de suficiente alcance deductivo para la teoría a que se refiere Goodman.

Se han construido varios sistemas lingüísticos (de interés fundamentalmente filosófico o metodológico) que en su interpretación normal no son de primer orden: por ejemplo, el *LII* [3] de Carnap, el sistema del *Logische Aufbau der Welt* del mismo autor, el sistema de Woodger de biología axiomática [4], el de Hull-Fitch para la teoría del aprendizaje de memoria [5], etc. Sin embargo, prácticamente todos estos sistemas permiten ser formulados de nuevo como sistemas de primer orden cuyos campos de individuos comprendan clases, relaciones, etcétera. En el capítulo VI trataremos los sistemas de este tipo.

---

[1] Véase N. GOODMAN, *The Structure of Appearance*.

[2] Véase C. I. LEWIS, *Mind and the World Order* (Scribner's, New York, 1929), especialmente las pp. 60-1.

[3] R. CARNAP, *The Logical Syntax of Language*, pp. 83-151.

[4] J. H. WOODGER, *The Axiomatic Method in Biology*, y *The Technique of Theory Construction (International Encyclopedia of Unified Science*, vol. II, núm. 5; 1939).

[5] C. HULL, F. B. FITCH, etc., *op. cit.*

Sintaxis de primer orden

Formulemos ahora detalladamente un metalenguaje sintáctico de tipo muy restringido: será un lenguaje de primer orden en sentido estricto, cuyo campo fundamental se compondrá de las expresiones (signos figuras) de L, siendo L el lenguaje objeto. Dentro de este estrecho metalenguaje de L podremos dar una descripción sintáctica completa de L, es decir, podemos definir los conceptos básicos de la sintaxis con relación a L. Una sintaxis de este tipo es llamada *sintaxis de primer orden* o *elemental*, por ser del tipo más elemental los conceptos y métodos utilizados.

La sintaxis que vamos a desarrollar aquí es del tipo clásico, en el cual las expresiones de L están tomadas como signos figuras. Admitimos explícitamente una infinidad de expresiones de L; aceptamos además que cada expresión primitiva de L existe en el sentido adecuado, y que, dadas dos expresiones de L de cualquier longitud, la expresión compuesta por la primera seguida inmediatamente de la segunda es también una expresión de L; por fin, cada expresión es de longitud finita, pero la totalidad de las expresiones de L es infinita numerable. Este procedimiento concuerda con ciertos supuestos que se suelen admitir en geometría física, física y matemáticas, y es en ciertos aspectos el método más conveniente (véase el capítulo XIII acerca del finitismo, el infinitismo, el nominalismo y otros temas afines).

Ya en el capítulo anterior hemos formulado L, de un modo algo tosco, dentro de un metalenguaje no formalizado. Algunos de los conceptos básicos de la sintaxis relativa a L están ya definidos allí de un modo no formal: por ejemplo, hemos definido por enumeración lo que se entiende por constante lógica primitiva de L; también lo que se entiende por axioma ha sido definido como cualquier expresión de tal y cual forma. La definición de 'fórmula' es, sin embargo, de tipo recurrente, como también la de 'teorema'.

La finalidad de este capítulo es explicitar plenamente todas estas definiciones mediante su incorporación dentro de un sistema formalizado. Hemos de indicar con precisión los conceptos primitivos que se presuponen, los supuestos que se hacen y los medios de deducción lógica que se emplean. La necesidad de restringir dichos medios lógicos a los de un estrecho lenguaje de primer orden lleva aparejado el que

hayamos de abandonar algunos de los poderosos instrumentos que suelen emplearse en sintaxis. Por ejemplo, no podemos utilizar definiciones recurrentes, pues la teoría de la recurrencia requiere para su adecuada formalización conceptos y supuestos lógicos de gran alcance (véase (VII, E)). Las definiciones dadas por recurrencia de un modo no formal en el capítulo anterior no serán aquí formalizables, y hemos de buscar un medio distinto de definir 'fórmula de *L*' y 'teorema de *L*': uno de los principales problemas técnicos de este capítulo será la obtención de definiciones satisfactorias de estos conceptos; y emplearemos para ello una adaptación de los métodos de Chwistek, Tarski y Quine [1].

Llamemos *M* al metalenguaje formalizado. El lenguaje objeto es cualquiera de los lenguajes *L* con inclusión de la identidad en sentido estricto o amplio. Para simplificar algo el desarrollo, admitiremos que *L* contiene al menos una constante predicado primitiva, pero *ni funtores ni constantes individuales como elementos primitivos*, siempre que no se especifique lo contrario (ello no implica limitaciones serias, como hemos visto en II, F, y nos permitirá simplificar algunas definiciones). Pero *M* mismo es un lenguaje de primer orden del tipo tratado en el capítulo II, y es, por tanto, otro ejemplo de *L* con inclusión de la identidad: se trata, sin embargo, de un lenguaje de primer orden en sentido estricto, cuyo campo fundamental de objetos es numerable. Por ser un metalenguaje *sintáctico*, hablamos en *M* exclusivamente de las expresiones lingüísticas de *L*; y contendrá como elementos primitivos constantes individuales y un funtor.

Procedamos inmediatamente a una formulación rigurosa de *M*. En el § A presentaremos los *elementos primitivos* de *M*, y daremos en el § B las *reglas* que los gobiernan. En el § C se demostrarán algunos *teoremas elementales* de *M*. En el § D se darán algunas *definiciones sintácticas* preliminares que conducirán a la *definición de 'Axioma de L'* en el § E y a la de *'Teorema de L'* en el § F. Finalmente, en el § G se darán algunos *teoremas sintácticos ulteriores* y en el § H se definirán ciertos *conceptos sintácticos* suplementarios.

A. Elementos primitivos

Los elementos lógicos primitivos del metalenguaje *M* serán los mismos que los de *L* en el capítulo II. Utilicemos como variables del metalenguaje.

$$\text{'}a\text{'}, \text{'}b\text{'}, \text{'}c\text{'}, \text{'}d\text{'}, \text{'}e\text{'}, \text{'}a'\text{'}, \text{'}b'\text{'}, \ldots, \text{'}a''\text{'}, \ldots$$

Este uso de primas o acentos nos capacita para formar cualquier nueva variable en caso de necesidad; ocasionalmente podemos también formar nuevas variables mediante subíndices numéricos. La 'v' y la '$\sim$' tendrán su significado habitual, y '$=$' y 'ε' serán utilizados como antes.

Pero, además, *M* contendrá varias constantes individuales y un im-

[1] L. Chwistek, *The Limits of Science* (Kegan Paul, London, 1948), pp. 83-100 y 162-91; y W. V. Quine, *Mathematical Logic*, pp. 291-305. También A. Tarski, *op. cit*, pp. 291-303.

portante funtor (o constante funcional). Recordemos que los signos primitivos del lenguaje objeto L son

'v', '~', '(', ')', '=', 'ɜ', '*x*', '*x*'', . . ., 'P', 'P'', . . ., y 'P''''''.

Pues bien, ahora no es necesario considerar, por ejemplo, '*x*'' o 'P''''', como expresiones indivisibles: '*x*'' se compone de una 'x' seguida de '', etc., etcétera; podemos así pensar que los signos primitivos de L son nueve, tomando '' como primitivo. Para mayor claridad, al hablar del signo ' (', de L será conveniente disponer de un signo peculiar de M; hagamos que sea '*pi*' un nombre propio dentro de M, y consideremos —si nos parece bien— a *pi* como la clase de los signos sucesos de L que son paréntesis izquierdos. Análogamente, admitamos que

'*pd*' nombra a ')' (paréntesis derecho),
'*uve*' nombra a 'v',
'*tilde*' nombra a '~',
'*id*' nombra a '=' (signo de identidad),
'*epinv*' nombra a 'ɜ' (épsilon invertido),
'*qis*' nombra a '*x*'
'*pe*' nombra a 'P'

y

'*ac*' nombra a ' ', (acento).

'*pi*', '*pd*', . . ., '*ac*' son, pues, constantes individuales primitivas de M, y cada una de ellas es el nombre de un símbolo primitivo correspondiente de L.

No introduciremos comillas en M: conseguiremos la claridad necesaria y evitaremos la confusión que a veces resulta del uso de comillas, empleando sistemáticamente '*uve*', '*tilde*', etc. (Véase, sin embargo, (XII, F).)

Además de estas nueve constantes individuales primitivas, es necesario en M un funtor que designe cierta operación o función. Sea '$\frown$' el símbolo de dicho funtor; los argumentos de esta función son los individuos de M, y sus valores funcionales son igualmente los individuos de M. Puede llamarse *encadenamiento* a la operación o función que este funtor representa, y $(a \frown b)$ puede denominarse *cadena* de las expresiones a y b: dados a y b, la cadena $(a \frown b)$ es la expresión compuesta por a *seguida inmediatamente* de b. Por ejemplo, $(pi \frown qis \frown pd)$ es simplemente la expresión '(x)' y $(pi \frown qis \frown pd \frown qis \frown id \frown qis)$ [1] es la expresión '$(x)\ x = x$'. La operación de encadenamiento es evidentemente esencial en M: sin ella nos sería imposible formar nombres de las expresiones de L que contengan más de un símbolo primitivo, y su uso nos permite explicitar la operación que implica siempre el escribir una letra de un lenguaje seguida inmediatamente de otra. Esta importante operación fue estudiada por primera vez por Gödel y por Tarski.

Cuando hablamos de una expresión a de L que va «seguida inmediatamente» de otra, estamos hablando, naturalmente, de un modo algo abstracto, pues a y b son signos *figuras*. Cuando se habla de un signo *suceso* seguido de otro —suponiendo que ambos sean visibles (o audibles,

[1] Omitimos aquí algunos paréntesis interiores innecesarios: esto se justifica por $TC2$, que enunciaremos más adelante.

o perceptibles de otro modo cualquiera)— puede darse un significado «concreto» muy determinado al encadenamiento. En tales circunstancias, la cadena de dos expresiones es el signo suceso compuesto por la primera seguida perceptiblemente de la segunda, aproximadamente como cuando el suceso o acaecer de una palabra en una línea impresa va seguido del de otra. Pero esta interpretación concreta no es admisible cuando los argumentos son signos figuras: éstas son en cierto modo entidades «abstractas», y el resultado de encadenar dos signos figuras es también un signo figura, que, por tanto, es abstracto en el mismo sentido que ellos. Naturalmente, puede exigirse que a cada signo figura corresponda al menos un signo suceso: podríamos decir que el signo suceso correspondiente es un miembro del signo figura dado. Por tanto, dado lo que significa decir que un signo suceso va seguido de otro, podemos explicar lo que significa una sucesión análoga de signos figuras: el signo figura $(a \frown b)$ se compondría únicamente de aquellos signos sucesos que a su vez se compusiesen de un miembro de a seguido de un miembro de b. Pero por el momento nos referimos únicamente a signos figuras: los signos sucesos no son en modo alguno valores para las variables de M, y no admitimos explícitamente que a cada signo figura corresponda un signo suceso; de ahí el carácter algo «abstracto» del significado de '$\frown$'. (Cf. los capítulos XI y XII.)

Debe subrayarse que M es un sistema lingüístico muy limitado: en él podemos hablar solamente del encadenamiento y de la identidad de expresiones de L. No disponemos de otros medios de expresión que los que permite la lógica de primer orden subyacente.

La expresión usada en M para nombrar una expresión de L correspondiente se llama *descripción estructural* de esta expresión. Obsérvese que el concepto de descripción estructural no es definible dentro de M: sólo lo es en un metalenguaje en el que podamos hablar de los símbolos de M así como de los de L, es decir, en un metalenguaje comparativo de M y L. '*pi*' es la descripción estructural de '(', '*pd*' de ')', etc.; y el resultado de escribir una constante individual primitiva de M seguida de '$\frown$' seguida de una constante individual primitiva de M, etc., es la descripción estructural de la expresión correspondiente de L. Por repetir un ejemplo anterior, '$(pi \frown qis \frown pd \frown qis \frown id \frown qis)$' es la descripción estructural de '$(x)x = x$'. El proceso de dar la descripción estructural de una expresión de L es una especie de deletreo lógico. Se enumeran sucesivamente los símbolos primitivos que constituyen la expresión, de modo muy semejante a como se deletrea una palabra.

Obsérvese que en M no es posible formar ninguna de las proposiciones de L: todo lo que podemos hacer en M es hablar *acerca de* las expresiones de L; éstas pueden *mencionarse* en M, pero no *usarse*. Más estrictamente, incluso las constantes lógicas primitivas de L habrían de ser consideradas como símbolos distintos de las constantes lógicas primitivas correspondientes de M. Sin embargo, el papel de dichas constantes en M y L es tan semejante que parece conveniente emplear los mismos símbolos en ambos lenguajes. Puede pensarse que dentro

de *M* utilizamos y mencionamos a la vez, por ejemplo, 'v'. La utilizamos para formar una disyunción dentro de *M*, como en

'(*pi* = *tilde* .v. ~*pi* = *tilde*)',

mientras que la mencionamos en

'~*uve* = *tilde*'.

Por tanto, podría pensarse que en

'(*uve* = *tilde* .v. ~*uve* = *tilde*)'

estamos a la vez utilizando y mencionando 'v'. En rigor, sin embargo, '*uve*' se toma solamente como la descripción estructural de la 'v' de *L*.

B. Reglas

Consideremos ahora la estructura axiomática de *M*. Los axiomas se dividen en dos grupos, el de los axiomas lógicos y el de los específicamente sintácticos.

Los *Axiomas lógicos* vienen dados por *R1- R8* y *Abst*, como anteriormente, siendo las reglas de deducción *MP* y *Gen*.

Los *Axiomas de sintaxis* nos los proporcionan las tres reglas siguientes [1]: La primera establece que dos símbolos primitivos cualesquiera de *L* no son idénticos, es decir, que *uve* no es idéntico a *tilde*, ni a *pi*, ni a *pd*, etc. Si escribimos '*a* ≠ *b*', como es lo habitual, en lugar de '~a = b', esta primera regla, que es una *Regla de diversidad* se formula del modo siguiente:

RSin1. ⊢ *uve* ≠ *tilde* . *uve* ≠ *pi* . *uve* ≠ *pd* . *uve* ≠ *id* . *uve* ≠ *epinv* . *uve* ≠ *qis* . *uve* ≠ *ac* . *uve* ≠ *pe* . *tilde* ≠ *pi* . ... . *ac* ≠ *pe*.

La segunda regla, otra regla de *diversidad*, establece que ningún símbolo primitivo de *L* es idéntico a ninguna cadena de expresiones de *L*.

RSin2. ⊢ ~(E*a*) (E*b*) *uve* = (*a*⌢*b*) . ~(E*a*) (E*b*)*tilde* = (*a*⌢*b*) . ... . ~(E*a*) (E*b*)*ac* = (*a*⌢*b*).

La siguiente es una *Regla de identidad*, que establece en qué circunstancias dos cadenas de expresiones de *L* deben considerarse idénticas: la cadena de *a* y *b* es idéntica a la de *c* y *d*, si y sólo si, o bien, (i) *a* es idéntico a *c* y *b* a *d*, o bien (ii) *b* es la cadena de un determinado *e* con *d* siendo *c* la cadena de *a* con dicho *e*, o bien (iii) *a* es la cadena de *c* con cierto *e* y *d* es la cadena de dicho *e* con *b*.

RSin3. ⊢ (*a*⌢*b*) = (*c*⌢*d*) . ≡ . ((*a* = *c* . *b* = *d*) .v. (E*e*) (*b* = (*e*⌢*d*) . *c* = (*a*⌢*e*)) .v. (E*e*) (*a* = (*c*⌢*e*) . *d* = (*e*⌢*b*))).

La cuarta y última regla que necesitamos es una regla sintáctica de deducción, una *Regla de inducción infinita:* nos dice que a partir de un conjunto infinito de fórmulas, cada miembro del cual establezca que determinada propiedad es atribuible a un símbolo dado (fijo) o a una cadena (fija) de símbolos de *L*, puede deducirse que dicha propiedad es atribuible a todas las expresiones. 'F' representará cualquier abstracto monádico de *M*, como se ha explicado en el capítulo anterior; y entonces la regla puede leerse del modo siguiente:

---

[1] Debidas en lo esencial a Tarski: véase *Der Wahrheitsbegriff*, p. 289 y p. 383. (Traducción inglesa de J. H. Woodger: *Logic, Semantics, Metamathematics* (Oxford University Press, Oxford, 1956).)

RSin4. Si cualquier fórmula resultante de la sustitución de '*a*' en '**F**a' por una expresión descriptivo-estructural de *M* es un teorema, entonces $\vdash (b)\ \mathbf{F}b$.

Si una propiedad dada es atribuible a *pi*, *pd*, etc., a ($pi \frown pd$), ($pi \frown qis \frown ac \frown ac$), etc., etc. (agotando todas las posibles frases descriptivo-estructurales de *M*), entonces podemos concluir mediante esta regla que todas las expresiones de *L* tienen la propiedad dada. Obsérvese que es esencial aquí un número *infinito* de fórmulas en la hipótesis, una para cada expresión de *L*. Esta regla estipula, en efecto, que las expresiones de *L* que pueden nombrarse —es decir, que aquéllas para las cuales existen en *M* descripciones estructurales— agotan el número de expresiones de L.

Podría pensarse que la admisión en *M* de una regla semejante, que requiere infinitos elementos, constituye una transgresión de los estrechos límites de primer orden que han sido establecidos para la sintaxis y la semántica. Pero no hemos prohibido en modo alguno este tipo de reglas, cuya admisión está plenamente de acuerdo con lo que entendemos por sistema de primer orden numerable. Naturalmente, tales reglas pueden rechazarse si se desea; pero su admisión no sólo es muy conveniente, sino que la creemos esencial para la formulación de algunos metalenguajes semánticos ulteriores. (Sin embargo, como más tarde veremos, no será necesario admitirla en la semántica intraducente.) Aquí suponemos que el lenguaje objeto *L* no contiene esta regla. El concepto de *demostración* en un lenguaje *M* que comprenda dicha regla ha de ser algo más amplio que el que hemos esbozado de un modo no formalizado en el capítulo anterior, pues cualquier empleo de ella implica una infinidad de etapas en la demostración; por otra parte, las demostraciones suelen comprender un número finito de etapas, como ya hemos visto; y, sin embargo, el concepto de *demostración en M* quedará claro gracias a unos ejemplos. (Cf. (V,H); (IX,D), y (XIII,E).)

C. Algunas propiedades elementales del encadenamiento

Estudiaremos algunos teoremas muy elementales referentes al encadenamiento (se presuponen las diversas leyes acerca de las funciones veritativas, los cuantificadores, la abstracción y la identidad, que han sido expuestas en el capítulo II).

Observamos primero que la cadena de dos expresiones cualesquiera *existe*.

TC1a. $\vdash (a)\ (b)\ (\mathrm{E}c)c = (a \frown b)$.

Esto se demuestra directamente mediante *R7*. Asimismo, dada la teoría de la identidad, tenemos inmediatamente una ley de *unicidad:*

TC1b. $\vdash (a)\ (b)\ (c)\ (d)\ (a = (b \frown c)\ .\ d = (b \frown c) :\supset : a = d)$.

Empleando *TC1a* podemos demostrar la ley *asociativa*.

TC2. $\vdash (a \frown (b \frown c)) = ((a \frown b) \frown c)$.

En efecto, por *RSin3*, sabemos que

$$\vdash e = (b \frown c)\ .\ e' = (a \frown b) :\supset : (a \frown e) = (e' \frown c).$$

A partir de lo cual podemos obtener *TC2*, en virtud de *TC1a* (para abandonar la hipótesis) y de algunas leyes de identidad.

Gracias a la Regla de inducción infinita, podemos demostrar —como se indica más abajo— otra ley de inducción, que establece que: si es un teorema que (i) todo signo primitivo de L tiene determinada propiedad, y que (ii) para dos expresiones cualesquiera a y b de L, si a y b tienen ambas dicha propiedad, entonces $(a \frown b)$ la tiene también; entonces es también un teorema que toda expresión de L, cualquiera que sea, tiene aquella propiedad. Sea

'SP a' la abreviatura de '$(a = uve \ .\mathrm{v}. \ a = tilde \ .\mathrm{v}. \ a = pi \ .\mathrm{v}. \ a = pd \ .\mathrm{v}. \ a = id \ .\mathrm{v}. \ a = epinv \ .\mathrm{v}. \ a = pe \ .\mathrm{v}. \ a = qis \ .\mathrm{v}. \ a = ac)$'. 'SP a' puede leerse 'a es un símbolo figura primitivo de L'. El nuevo principio inductivo es, pues, el siguiente:

TC3a. Si $\vdash (a)\,(\mathrm{SP}\ a \ .\supset. \ \mathrm{F}a) \ .\ (a)\,(b)\,(\mathrm{F}a \ .\ \mathrm{F}b :\supset: \mathrm{F}(a \frown b))$, entonces $\vdash (a)\ \mathrm{F}a$.

La demostración no es difícil. 'Hip' representará

'$(a)\,(\mathrm{SP}\ a \ .\supset. \ \mathrm{F}a) \ .\ (a)\,(b)\,(\mathrm{F}a \ .\ \mathrm{F}b :\supset: \mathrm{F}(a \frown b))$'.

Observamos primero que, por la teoría de la cuantificación,

$$\vdash \mathrm{Hip} :\supset: \mathrm{F}\ uve,$$
$$\vdash \mathrm{Hip} :\supset: \mathrm{F}\ tilde,$$

etcétera. Pero también,

$$\vdash \mathrm{Hip} :\supset: \mathrm{F}\ (uve \frown uve),$$
$$\vdash \mathrm{Hip} :\supset: \mathrm{F}\ (uve \frown tilde),$$

y así con todas las cadenas posibles. Podemos pues mostrar que si

$$\vdash \mathrm{Hip},$$

entonces cualquier proposición que se forme remplazando 'a' en '$\mathrm{F}a$' por una descripción estructural es un teorema. Pero si esto último es cierto sabemos, por *RSin4*, que entonces

$$\vdash (a)\ \mathrm{F}a.$$

Luego si

$$\vdash \mathrm{Hip},$$

entonces

$$\vdash (a)\ \mathrm{F}a.$$

Ahora bien, esto es *TC3a*. (En el § G, más adelante, demostraremos una regla de inducción de alcance algo mayor).

Utilizando esta regla de inducción podemos mostrar que si una cadena $(a \frown b)$ es idéntica a una cadena $(a \frown c)$ entonces b es idéntico a c.

TC3b. $\vdash (a \frown b) = (a \frown c) \ .\supset. \ b = c.$

la demostración correspondiente es inductiva con arreglo a *TC3a*. Veámosla: sabemos por *RSin3* que

$\vdash \mathrm{SP}\ a \ .\ (a \frown b) = (a \frown c) :\supset: b = c \ .\mathrm{v}. \ (\mathrm{E}e)\ (b = (e \frown c) \ .\ a = (a \frown e)) \ .\mathrm{v}. \ (\mathrm{E}e)\ (a = (a \frown e) \ .\ c = (e \frown b))$.

Pero por *RSin2* y varias leyes de identidad,

$$\vdash \mathrm{SP}\ a \ .\supset. \sim(\mathrm{E}e)a = (a \frown e).$$

De donde

$$\vdash \mathrm{SP}\ a \ .\supset. \ (b)\ (c)\ ((a \frown b) = (a \frown c) \ .\supset. \ b = c).$$

Pero también,

$\vdash (b)(c)((a \frown b) = (a \frown c) \ .\supset. \ \mathrm{b} = c) \ .\ (b)(c)((d \frown b) = (d \frown c) \ .\supset. \ b = c)$ $:\supset: (b)(c)(((a \frown d) \frown b) = ((a \frown d) \frown c) \ .\supset. \ b = c)$,

si empleamos *TC2* y varias leyes de identidad; y de aquí se obtiene *TC3b* por *TC3a*.

RSin2 nos dice que ninguno de los símbolos primitivos de *L* es una cadena. Claro es que algunas *expresiones* de *L* son evidentemente cadenas, pero ninguna expresión *a* es una cadena de *a* con algo o de algo con *a*.

TC4a. $\vdash a \neq (a \frown b)$.

TC4b. $\vdash a \neq (b \frown a)$.

Las demostraciones son inductivas. Por *RSin2* y varias leyes de identidad,

(1) $\vdash \mathrm{SP}\, a \,.\supset.\, (c)a \neq (a \frown c)$.

Pero también tenemos que

(2) $\vdash (c)a \neq (a \frown c) \,.\, (c)b \neq (b \frown c) :\supset: (c)\,(a \frown b) \neq ((a \frown b) \frown c)$.

En efecto, observamos que por *RSin3*,

$\vdash (a \frown b) = ((a \frown b) \frown c) :\supset: (a = (a \frown b) \,.\, b = c) \,.\mathrm{v}.\, (\mathrm{E}e)\,(b = (e \frown c) \,.\, (a \frown b) = (a \frown e))\,.\mathrm{v}.\, (\mathrm{E}e)\,(a = ((a \frown b) \frown e) \,.\, c = (e \frown b))$.

Pero llegamos a

$$\vdash a = (a \frown b) \,.\, b = c :\supset: a = (a \frown c),$$
$$\vdash b = (e \frown c) \,.\, (a \frown b) = (a \frown e) :\supset: b = (b \frown c),$$

utilizando *TC3b*, y luego a

$$\vdash a = ((a \frown b) \frown e) \,.\supset.\, (a \frown b) = (((a \frown b) \frown e) \frown b),$$

de donde, empleando *TC2* dos veces y *TC3b*,

$$\vdash a = ((a \frown b) \frown c) \,.\, c = (e \frown b) :\supset: b = (b \frown c).$$

A partir de lo cual obtenemos fácilmente (2). Empleando (1) y (2) obtenemos *TC4a* en virtud de *TC3a*.

La demostración de *TC4b* es análoga. Por *TC4a* o *TC4b* tenemos inmediatamente que

TC4c. $\vdash a \neq (a \frown a)$.

El encadenamiento no es conmutativo:

TC5. $\vdash \sim(a)(b)(a \frown b) = (b \frown a)$.

Esto se ve rápidamente si observamos que, por *RSin1*,

$$\vdash \sim pi = pd.$$

De donde, por *RSin3* y *RSin2*,

$$\vdash \sim (pi \frown pd) = (pd \frown pi).$$

Luego,

$$\vdash (\mathrm{E}a)(\mathrm{E}b) \sim (a \frown b) = (b \frown a),$$

de lo cual obtenemos *TC5*.

Una *expresión* de *L* es cualquier símbolo primitivo de *L* o cualquier cadena:

'Exp *a*' abrevia '(SP*a* .v. (E*b*)(E*c*) $a = (b \frown c)$)'.

Una de las principales ventajas de la regla de inducción *TC3a* es la de permitirnos demostrar que todos los objetos que son valores para las variables de *M* son expresiones de *L*.

TC6. $\vdash (a)$ Exp. *a*.

Obsérvese que

$$\vdash \text{SP } a \;.\supset.\; \text{Exp. } a,$$

y que

$$\vdash \text{Exp } b \;.\; \text{Exp } c \;.\; a = (b \frown c) :\supset: \text{Exp } a.$$

De aquí llegamos a *TC6*, por *TC3a*.

Asimismo, en virtud de *SinR2*, *TC6* y las definiciones,

TC7. $\vdash \sim\text{SP } a \;.\equiv.\; (\text{E}b)\,(\text{E}c)a = (b \frown c)$.

D. Algunas definiciones preliminares

Definiremos ahora varios conceptos sintácticos básicos (con relación a *L*) dentro de *M* [1].

Se dice que una expresión *a* de *L* *inicia* una expresión *b*, si *b* se compone de *a* encadenada a una determinada *c*. Más útil que ésta es la relación de *iniciar o ser idéntico a*; sea 'Ini' el símbolo de esta relación; su definición es entonces la siguiente:

'*a* Ini *b*' abrevia '$((\text{E}c)b = (a \frown c)$ .v. $a = b)$' [2].

Por ejemplo, '$(x)x$' inicia la expresión '$(x)x = x$' en el sentido de esta definición. De modo análogo se define la relación de *acabar o ser idéntico a*.

'*a* Acab *b*' abrevia '$((\text{E}c)b = (c \frown a)$ .v. $a = b)$'.

Por ejemplo, '$=x$' acaba '$(x)x = x$'.

A base de 'Ini' y 'Acab' puede definirse el concepto de *segmento* o *parte consecutiva de*;

'*a* Seg *b*' abrevia '$(\text{E}c)$(*a* Acab *c* . *c* Ini *b*)'.

a es un segmento o parte consecutiva de *b* si y sólo si *a* acaba cierto *c*, el cual inicia *b*. La expresión 'v Px'', por ejemplo, es parte consecutiva de la fórmula '$(x)(\sim\text{P}x$ v Px')'. Obsérvese que esta definición no incluye ni permite segmentos desconectados o sueltos de una expresión.

Una expresión *a* es una *sarta de acentos* si se compone de *ac* encadenado a sí mismo cualquier número finito de veces. Naturalmente, no puede definirse así una sarta de acentos en *M* sin una previa definición de 'número finito de veces'. Pero puede decirse que *a* es una sarta de acentos si y sólo si todos los símbolos primitivos contenidos en *a* son *ac*.

'SartaAc *a*' abrevia '(b) (SPb . b Seg $a :\supset: b = ac$)'.

Toda expresión de *L* del tipo de ' ′′′′′ . . . ' es una SartaAc en este sentido.

Una expresión *a* de *L* es una *variable* si y sólo si *a* es *qis* o se compone de *qis* seguido de uno o más acentos.

'Vbl *a*' abrevia '$(a = qis$ .v. $(\text{E}b)$ (SartaAc b . $a = (qis \frown b))$)'.

Se ha estipulado anteriormente que se tomarían como variables de *L*

[1] Estas definiciones son en su mayoría adaptaciones de las de Quine, *op. cit.*, pp. 295-305.

[2] Esta definición debe tomarse en el sentido de que, en lugar de '*a*' y '*b*', pueden ponerse variables cualesquiera de *M*, escogiendo como variable '*c*' cualquier variable distinta de '*a*' y '*b*'. Deben aplicarse observaciones análogas a las definiciones dadas en el apartado anterior y en todo el resto. Las definiciones que contienen variables de *L* tendrán en adelante el valor de lo que a veces se llaman *esquemas de definiciones*,

'x', 'x'', 'x''', etc., pues bien, ello se hizo simplemente para facilitar aquí la definición de 'Vbl': si admitiésemos también en L variables como 'y', 'z', etc., la definición sería forzosamente más complicada.

De un modo análogo puede definirse el concepto de *constante predicativa primitiva:* una expresión a puede ser llamada así si y sólo si es o bien pe o bien pe seguida de una sarta de acentos. No necesitamos, sin embargo, una definición tan general, puesto que en L hay tan sólo un número finito y especificado de constantes predicativas primitivas, y cada una de ellas de un grado especificado. Supongamos que tenemos sólo cinco constantes predicativas primitivas, como en (II,A), y que 'P' es de grado 1, 'P'' de grado 2, . . ., 'P''''' de grado 5.

En este caso necesitamos sólo la siguiente definición, más restringida:

'ConsPredPrim a' abrevia '$(a = pe$ .v. $a = (pe^{\frown}ac)$ .v. $a = (pe^{\frown}ac^{\frown}ac)$ .v. $a = (pe^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}ac)$ .v. a $= (pe^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}ac))$'.

Podemos definir ahora el concepto de fórmula *atómica* de L como una fórmula compuesta por '=' con variables en ambos lados, o por una constante predicativa primitiva de grado n ($1 \leqq n \leqq 5$) seguida de n variables.

'FmlaAt' abrevia '(Eb)(Ec)(Ed)(Ee)(Ea')(Vbl b . Vbl c . Vbl d . Vbl e . Vbl a' : $a = (b^{\frown}id^{\frown}c)$ .v. $a = (pe^{\frown}b)$ .v. $a = (pe^{\frown}ac^{\frown}b^{\frown}c)$ .v. $a = (pe^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}b^{\frown}c^{\frown}d)$ .v. $a = (pe^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}b^{\frown}c^{\frown}d^{\frown}e)$ .v. $a = (pe^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}ac^{\frown}b^{\frown}c^{\frown}d^{\frown}e^{\frown}a'))$'.

La definición de 'FmlaAt' para un L que contuviese más (o menos) de cinco constantes predicado primitivas sería análoga. (Recuérdese que L no contiene constantes individuales ni funcionales; en caso de que esto sucediese habría que tenerlo en cuenta en esta definición: véase (X,A).)

Antes de definir el concepto de *fórmula* en general, necesitamos otras definiciones preliminares.

Queremos definir primero lo que significa decir que una expresión a es el resultado de cuantificar b universalmente, o que a se obtiene a partir de b prefijando a b un cuantificador universal. Decir esto es sencillamente decir que existe una variable c tal que a se compone de las siguientes expresiones, por orden: paréntesis izquierdo, c, paréntesis derecho, b.

'a Gen b' abrevia '(Ec)(Vbl$c$. $a = (pi^{\frown}c^{\frown}pd^{\frown}b)$)'.

El lado izquierdo de esta definición puede leerse 'a es una *generalización* de b'. Adviértase que aquí b puede ser cualquier expresión de L, y no sólo una fórmula, aunque en todos los casos importantes en que esta definición se utiliza b sea de hecho una fórmula.

El concepto entrañado en 'a Gen b' corresponde en cierto modo a la *Regla de generalización* tal como ha sido expuesta sin formalizar en el capítulo anterior. Cuando a y b son fórmulas, 'a Gen b' significa que a puede obtenerse a partir de b por medio de *Gen*. La definición siguiente es la de un concepto que corresponde de un modo semejate a la *Regla del Modus Ponens.*

'a MP b, c' abrevia '$(c = (pi^{\frown}tilde^{\frown}b^{\frown}uve^{\frown}a^{\frown}pd)$ .v. $b = (pi^{\frown}tilde^{\frown}c^{\frown}uve^{\frown}a^{\frown}pd))$'.

Decir 'a MP b, c' supone fundamentalmente —en caso de que a,

b, y *c* sean fórmulas— decir que *a* puede obtenerse a partir de *b* y *c* por medio de la regla *MP*. Claro que 'MP' se define aquí para todas las expresiones *a*, *b* y *c* como argumentos, aunque la definición sólo será útil cuando *a*, *b* y *c* sean fórmulas.

Una expresión *a* es una *consecuencia inmediata* de *b* y *c*, si y sólo si *a* puede obtenerse a partir de *b* y *c* por medio de *MP* o a partir de *b* por medio de *Gen*.

'*a* CI *b*, *c*' abrevia '(*a* MP *b*, *c* .v. *a* Gen *b*)'

Una expresión *a* puede obtenerse a partir de *b* por *abstracción* si y sólo si existen unas variables *c* y *d* tales que *a* es $(c \frown epinv \frown b \frown d)$.

'*a* Abst *b*' abrevia '(E*c*) (E*d*) (Vbl *c* . Vbl *d* . $a = (c \frown epinv \frown b \frown d)$)'.

Como tendremos frecuente ocasión de hablar de cadenas tales como $(pi \frown a \frown uve \frown b \frown pd)$, $(tilde \frown a)$, $(pi \frown tilde \frown a \frown uve \frown b \frown pd)$, etc., nos serán útiles las siguientes definiciones.

'(*a uve b*)' abrevia '$(pi \frown a \frown uve \frown b \frown pd)$',

'*tilde a*' abrevia '$(tilde \frown a)$',

y

'(*a dscd b*)' abrevia '(*tilde a uve b*)'.

Esta última definición introduce '*dscd*' como descripción estructural de la expresión de *L* compuesta por *a* seguida de '⊃' seguido de *b* (estando el conjunto de tal expresión entre paréntesis); pero esta expresión es simplemente una abreviatura de $(pi \frown tilde \frown a \frown uve \frown b \frown pd)$ (cf. *D1* de (II, A)). Análogamente, hagamos que

'(*a punto b*)' abrevie '*tilde* (*tilde a uve tilde b*)',

y

'(*a triguión b*)' abrevie '((*a dscd b*) *punto* (*b dscd a*))'.

(Cf. *D2* y *D3* de (II, A).) Establecemos también que

'*a cu b*' abrevia '$(pi \frown a \frown pd \frown b)$',

y

'*a cuexis b*' abrevia '(*tilde a cu tilde b*)'.

Estas dos definiciones introducen notaciones para la cuantificación universal y existencial respectivamente, en un contexto en el que *a* y *b* satisfagan las condiciones necesarias.

Empleamos '*uve*' en vez de '*Uve*' con el fin de recordar que '(*a uve b*)' es un *término* de *M*, no una fórmula, lo mismo que '*tilde*', '*punto*', etc. Empleamos siempre mayúsculas para los símbolos de predicados y, por tanto, si escribiésemos '(*a Uve b*)' podríamos confundirlo con una fórmula de *M*.

Definiremos lo que se entiende por fórmula por el método de Quine de los *ingredientes enmarcados*. Recordemos que, intuitivamente hablando, una fórmula es una expresión que puede obtenerse a partir de fórmulas atómicas mediante un número finito de aplicaciones de la negación, la disyunción, la cuantificación o la abstracción. Dada cualquier fórmula, se podría, por tanto, separar de ella como partes las fórmulas de que se compone: por ejemplo, hablando sin formalización, de una disyunción '(A v B)' pueden separarse A y B, de una negación '~A' puede separarse A, y también A de una cuantificación '(x) A'; a partir de cualquier fórmula podría seguirse este proceso hasta obtener como

últimos componentes fórmulas atómicas. Por ejemplo, consideremos la fórmula

$$\text{`}(x)(A_1 \vee A_2) \supset ((y)(B_1 \vee \sim B_2) \,.\, (Ey)(A_1 \supset B_2))\text{'},$$

en que A_1, A_2, B_1 y B_2 son fórmulas atómicas y **x** e **y**, variables. Escrita por completo en la notación primitiva, se transforma en

(1) '$(\sim(x)(A_1 \vee A_2) \vee \sim(\sim(y)(B_1) \vee \sim B_2) \vee \sim\sim(y)\ \sim(\sim A_1 \vee B_2)))$'.

El miembro izquierdo de esta disyunción puede descomponerse sucesivamente en

(*a*) '$\sim(x)(A_1 \vee A_2)$', '$(x)(A_1 \vee A_2)$', '$(A_1 \vee A_2)$', A_1, A_2.

Análogamente, el miembro derecho de (1) puede descomponerse sucesivamente en

(*b*) '$\sim(\sim(y)(B_1 \vee \sim B_2) \vee \sim\sim(y)\sim(\sim A_1 \vee B_2))$', '$\sim(y)(B_1 \vee \sim B_2) \vee \sim\sim(y)\sim(\sim A_1 \vee B_2)$', '$\sim(y)(B_1 \vee \sim B_2)$', '$\sim\sim(y)\sim(\sim A_1 \vee B_2)$', '$(y)(B_1 \vee \sim B_2)$', '$\sim(y)\sim(\sim A_1 \vee B_2)$', '$B_1 \vee \sim B_2$', '$(y)\sim(\sim A_1 \vee B_2)$', B_1, '$\sim B_2$', '$\sim(\sim A_1 \vee B_2)$', B_2, '$\sim A_1 \vee B_2$', '$\sim A_1$', B_2, A_1.

Podríamos ahora formar la siguiente sucesión de fórmulas a partir de la lista (*a*),

(2) A_1, A_2, '$(A_1 \vee A_2)$', '$(x)(A_1 \vee A_2)$', '$\sim(x)(A_1 \vee A_2)$',

y otra serie semejante para el miembro derecho de la disyunción, a partir de la lista (*b*),

(3) B_1, B_2, A_1, '$\sim B_2$', '$(B_1 \vee \sim B_2)$', '$\sim A_1$', '$(\sim A_1 \vee B_2)$', . . .

Formemos ahora la sucesión compuesta por los miembros de la (2) seguidos de los de la (3) evitando repeticiones, y añadamos finalmente la fórmula (1) como último miembro; llamemos (4) a la sucesión o serie obtenida.

Parece evidente que podemos considerar una fórmula como el tipo de expresión que puede construirse de este modo a partir de miembros *anteriores* de una sucesión del tipo (4) por medio de la cuantificación, la abstracción, la disyunción y la negación. Podríamos intentar reflejar esta idea en una definición formal: no tendríamos problemas si hubiésemos definido previamente 'sucesión' y 'anterior'; pero las sucesiones se consideran generalmente como relaciones multiformes cuyos codominios se componen de los números naturales[1]. Podríamos, pues, definir la anterioridad como la relación «ser menor que» entre números; pero no disponemos de estos conceptos, porque *M* carece tanto de variables de relación como de variables numéricas; tendríamos que emplear, en vez de sucesiones, largas expresiones formadas encadenando por orden las expresiones que de otro modo serían miembros de la sucesión: en lugar de la serie (4) tendríamos una expresión consistente en A_1, encadenado a A_2 encadenado a '$(A_1 \vee A_2)$' ... encadenados, finalmente, a (1). La principal dificultad que entraña el tomar tales expresiones en lugar de sucesiones es que no permite hablar de las *partes* de una expresión de esta clase del mismo modo en que hablamos de los *miembros* de una

[1] Recordemos que aquellos objetos que están en una relación diádica *R* dada con algún objeto constituyen el *dominio* de esta relación y aquellos objetos para los cuales algo es el soporte de *R* constituyen su *codominio*. (También, que un objeto que está en el dominio o el codominio de *R* está en el *campo* de *R*.) Y una relación diádica *R* es una relación *multiforme* si y sólo si para todo *x*, *y*, y *z* de su campo, si *x* es soporte de *R* para *z* y también *y* lo es para *z* entonces *x* e *y* son idénticos.

sucesión: por ejemplo, A_1 encadenado a A_2 sería una parte de la expresión larga, pero no correspondería a ningún miembro de la serie (4). En consecuencia, hemos de buscar un método que nos permita hablar de los miembros de las expresiones largas y no meramente de partes, indiscriminadamente. Este método consistirá en enmarcar los elementos de la expresión a ambos lados con ciertos símbolos que no puedan tener significado propio dentro de ningún elemento; cada constituyente sería así un *ingrediente enmarcado* o constituyente enmarcado de la expresión larga; y para enmarcar podemos emplear cualquier expresión arbitraria que no sea de ningún otro modo parte de una fórmula, por ejemplo, '( )', es decir, $(pi^{\frown}pd)$. Ahora reflejaremos el método descrito en unas definiciones formales.

Se dice que una expresión a es un *ingrediente enmarcado* de b si y sólo si el resultado de enmarcar a a uno y otro lado por medio de '( )' es una parte consecutiva de b, y ' ( )' no es por sí mismo una parte consecutiva de a.

'a IngEnm$b$' abrevia '$((pi^{\frown}pd^{\frown}a^{\frown}pi^{\frown}pd)$ Seg b. $\sim(pi^{\frown}pd)$ Seg $a)$' cuando $(pi^{\frown}pd)$ no aparece en a', b', . . ., c', y b es

$$(pi^{\frown}pd^{\frown}a'^{\frown}pi^{\frown}pd^{\frown}b'^{\frown}pi^{\frown}pd^{\frown} \ . \ . \ . \ ^{\frown}pi^{\frown}pd^{\frown}c'^{\frown}pi^{\frown}pd),$$

siendo cada una de las expresiones a', b' . . ., c' un ingrediente enmarcado de b. Adviértase que cualesquiera otros símbolos de L que no pudiesen aparecer significativamente dentro de una fórmula podrían utilizarse, igualmente, en lugar de $(pi^{\frown}pd)$.

Una relación de *anterioridad* es definible del modo siguiente:

'a Ant$_b$ c' abrevia '(Ed)(d Ini b . a IngEnm$d$. c IngEnm$b$. $\sim c$IngEnm$d$)'.

Una expresión a es anterior a c en b si y sólo si existe una expresión d que inicia b y de la cual a es un ingrediente enmarcado, y c es un ingrediente enmarcado de b pero no de d. El concepto de anterioridad que esto implica parece intuitivamente lo bastante claro.

Podemos ahora definir una fórmula como un ingrediente enmarcado de cierta expresión b, cada ingrediente enmarcado de la cual es, o bien una fórmula atómica, o la negación de un ingrediente enmarcado anterior de b, o bien la disyunción de dos ingredientes anteriores de b, o es el resultado de cuantificar universalmente una fórmula anterior de b, o bien se obtiene a partir de una fórmula anterior por abstracción.

'Fmla a' abrevia '(Eb) (a IngEnm b . (c) (c IngEnm b :$\supset$: FmlaAt c .v. (Ed) (Ee)(d Ant$_b$ c . e Ant$_b$ c : c = (*tilde* d) .v. c = (d *uve* e) .v. c Gen d .v. c Abst d)))'.

Esta definición de *fórmula de L* dentro de M logra su finalidad con toda la generalidad necesaria.

Obsérvese que logramos, gracias a los ingredientes enmarcados, el efecto de una definición recurrente: leyendo de izquierda a derecha, los primeros ingredientes de b son las fórmulas atómicas, a las que siguen las fórmulas moleculares más sencillas, y así va creciendo progresivamente la complejidad de las fórmulas. De este modo podremos definir más adelante conceptos que son, asimismo, definibles por recurrencia (véase (VII,E)). Adviértase también que esta definición hace más preciso el concepto de fórmula esbozado de un modo no formal en

II,A, donde, sin embargo, se admite que *L* contiene quizá una o más constantes individuales o funcionales.

Las fórmulas aquí definidas comprenden a la vez las proposiciones y las funciones proposicionales propiamente dichas. A fin de diferenciarlas hemos de definir el concepto de *aparición libre de una variable* en una expresión dada. Hasta ahora no ha sido necesario distinguir entre una expresión y una *aparición* de una expresión; pero para hablar de variables libres esta distinción es esencial. La primera aparición de 'x' es libre en

(5) '(Px v (x)Px)',

por ejemplo, mientras que la segunda y la tercera son *ligadas*. ¿Cómo podemos distinguir entre diferentes apariciones de una misma variable dentro de un contexto dado? Un modo de explicar las apariciones es a base de los segmentos que inician: digamos (sujetos a una ulterior modificación) que a es una *aparición* de una expresión b en c si y sólo si a inicia c y b acaba a. Este procedimiento puede parecer *prima facie* algo artificial; pero nos capacita para distinguir diferentes apariciones del mismo símbolo o expresión, y esto es en rigor lo preciso: en (5), '(Px' es la primera aparición de la variable x, 'Px v(x' es la segunda y 'Px v(x)Px' es la tercera. La definición del concepto de aparición es la siguiente.

'a Apar$_e$ b' abrevia '(a Ini c . b Acab a . $\sim(a \frown ac)$ Ini c)'.

La cláusula que hemos añadido '$\sim(a \frown ac)$' es útil aquí para evitar que las apariciones de segmentos iniciales de variables o de constantes predicativas primitivas se consideren apariciones de variables o de constantes predicativas primitivas respectivamente: parecería antinatural considerar que la variable 'x''', por ejemplo, tiene una aparición dentro de

(6) 'Px''''

Y, sin embargo, sin la cláusula añadida, 'Px''' sería una aparición de la variable 'x''' en (6). (Véase más adelante, al final del § E, otro posible método que no emplea el concepto de aparición).

Podemos también querer decir que a *aparece* en b. Esto equivale a decir simplemente que existe una c que es una aparición de a en b.

'a Apar b' abrevia '(Ec)c Apar$_b$ a'.

Decir que una aparición de una variable a en b es una aparición *ligada* de dicha variable en b, como ya hemos visto en el capítulo II (§§ A y D), es decir que dicha aparición es una parte de b de la forma (a *cu* e) o ($a \frown epinv \frown e$), siendo e una fórmula. Más exactamente, dentro de M podemos decir que una aparición a de una variable b en c es una aparición ligada de b en c si y sólo si existe una expresión a' que es una fórmula, y: o bien existen una b' y una c' tales que a es ($b' \frown b$) y, (i) ($b' \frown c'$) es una aparición de (b *cu* a') en c y (b *cu* a') no acaba c', o (ii) ($b' \frown c'$) es una aparición de ($b \frown epinv \frown a'$) en c y ($b \frown epinv \frown a'$) no acaba c'; o bien ($a \frown epinv \frown a'$) es un segmento de c.

'a Apar$_e$ Lg b' abrevia '(Vbl b . a Apar$_e$ b . (Ea') (Fmla a': (Eb') (Ec') (a = ($b' \frown b$) : ($b' \frown c'$) Apar$_e$ (b *cu* a') . $\sim$(b *cu* a') Acab c') .v. (($b' \frown c'$) Apar$_e$ ($b \frown epinv \frown a'$) . $\sim(b \frown epinv \frown a')$ Acab c')) .v. ($a \frown epinv \frown a'$) Seg c))'. No es difícil comprobar que esta definición es intuitivamente adecuada.

Decir que una aparición c de una variable a en b es una aparición *libre* es decir que no es ligada.

'c Apar$_b$ Lb a' abrevia '(c Apar$_b$ a . Vbl a . $\sim c$ Apar$_b$ Lg a)'.

Ocasionalmente puede interesarnos decir que una variable a es una *variable libre* de b sin especificar la aparición.

'a VLb b' abrevia '(Ec)c Apar$_b$ Lb a'.

Ahora son definibles los conceptos de función proposicional propiamente dicha y de proposición [1]. Se dice que una expresión a es una *función proposicional estricta* (o *fórmula abierta* de L) si es una fórmula y contiene al menos una variable libre.

'FunPropEst a' abrevia '(Fmla a . (Eb)b VLb a)'.

Y una expresión a es una *proposición* (o *fórmula cerrada*) si es una fórmula y no contiene variables libres.

'Prop a' abrevia '(Fmla a . $\sim$(Eb)b VLb a)'.

Más adelante, en el § G, daremos algunos teoremas elementales referentes a estos diversos conceptos.

E. 'Axioma de L'

Podemos ahora definir rigurosamente dentro de M lo que se entiende por *axioma* de L.

Los axiomas de L que hemos estipulado (de un modo no formalizado) en el capítulo anterior mediante *R1* son expresiones de la forma

'(A v A) $\supset$ A'.

Luego podemos establecer que

'AxFV1 a' abrevia '(Eb) (Fmla b . a = ((b *uve* b)*dscd* b))'.

Una expresión a de L es un axioma de funciones veritativas del tipo primero si y sólo si existe una fórmula b tal que a sea la expresión ((b *uve* b)*dscd* b).

Análogamente,

'AxFV2 a' abrevia '(Eb)(Ec)(Fmla b . Fmla c . a = (b *dscd* (b *uve* c)))'.

'AxFV3 a' abrevia '(Eb)(Ec)(Fmla b . Fmla c . a = ((b *uve* c) *dscd* (c *uve* b)))',

y

'AxFV4 a' abrevia '(Eb)(Ec)(Ed)(Fmla b . Fmla c . Fmla d . a = ((b *dscd* c)*dscd*((d *uve* b)*dscd*(d *uve* c))))'.

La correspondencia entre estas tres definiciones y las reglas *R2*, *R3* y *R4*, respectivamente, es análoga a la correspondencia existente entre *R1* y la definición de 'AxFV1 a'.

Recordemos ahora que *R5* establece, cuando L no contiene más que variables como términos primitivos, que

$$\vdash (x)A \supset B,$$

si **B** difiere de **A** tan sólo por contener apariciones libres de cierta variable **y** dondequiera que haya apariciones libres de la variable **x** en **A**. Con el fin de definir lo que se entiende por axioma de cuantificación

[1] Téngase en cuenta nuestra nota del capítulo I, § F *(N. de los T.)*.

de este tipo, necesitamos una definición rigurosa de la frase '**B** difiere de **A** sólo (etc.)'. En vez de definirla directamente vamos a hacerlo en tres etapas del modo siguiente:

Estableceremos primero que 'a SLb1$^b_c d$' simbolice que a difiere de d sólo por contener una aparición libre de b en lugar de *una sola* aparición libre de c en d (la 'S' y la 'Lb' sirven para sugerir 'substitución' y 'libre'): se obtiene a sustituyendo b en lugar de una aparición libre de c en d (siempre que la aparición de b resultante sea libre en a). Esto puede definirse exigiendo que existan expresiones a' y b' tales que a' sea una aparición libre de c en d, b' sea una aparición libre de b en a, que para todo e, a' sea $(e \frown c)$ si y sólo si b' es $(e \frown b)$, y que para todo e, d sea $(a' \frown e)$ si y sólo si a es $(b' \frown e)$.

'a SLb1$^b_c d$' abrevia '(Ea)(Eb')(a' AparLb$_a$ c . b' AparLb$_a$ b . (e) ($a' = (e \frown c)$. $\equiv$. $b' = (e \frown b)$) . (e) ($d = (a' \frown e)$. $\equiv$. $a = (b' \frown e)$))'.
Puede verse en un ejemplo que esta definición nos proporciona lo que deseamos: en efecto, *si* a es

'(Px' v (x)Px)'

y d es

'(Px v (x)Px)',

(en que c es 'x' y b es 'x'') entonces se cumple 'a SLb1^b_c d'.

Esta definición puede extenderse a los casos en que haya 0 o *más de una* apariciones libres de c en d, del modo siguiente.

'a SLb?^b_c d' abrevia '(Ee) (a IngEnm e . (a') (a' IngFnm e :$\supset$: $a' = d$. v. (Eb')(b' Ant$_e$ a' . a' SLb1^b_c b'))'.
'a SLb?^b_c d' se da, pues, siempre que exista una expresión e de la cual a sea un ingrediente enmarcado y tal que para cada ingrediente enmarcado a' de e, o bien a' sea d o bien exista un ingrediente anterior b' de e tal que a' SLb1^b_c b'.

Ahora es fácil definir la idea de que a difiere de d sólo en que contiene apariciones libres de b *dondequiera que* haya apariciones libres de c en d.

'a SLb^b_c d' abrevia '(a SLb?^b_c d : c VLb a . $\supset$. $b = c$)'.
'a SLb^b_c d' se cumple sólo cuando se cumple también 'a SLb?^b_c d', siempre que no se dejen en a apariciones libres de c (salvo, naturalmente, cuando b y c sean la misma variable).

Podemos ahora dar la definición de lo que se entiende por axioma de cuantificación según lo estipulado por *R5* o *R6*. Una expresión a es un axioma cuantificacional del primer tipo si y sólo si existen una fórmula e y unas expresiones b, c y d tales que b SLb^c_d e y que a sea (d *cu* e *dscd* b).

'AxCuantl a' abrevia '(Eb)(Ec)(Ed)(Ee)(Fmla e . b SLb^d_c e . a = (d *cu* e *dscd* b))'.
Análogamente,

'AxCuant2 a' abrevia '(Eb)(Ec)(Ed)(Vbl b . Fmla c . Fmla d . $\sim b$ VLb c . $a = (b$ *cu* (c *uve* d) *dscd* (c *uve* b *cu* d)))'.

También puede definirse fácilmente lo que es un axioma de identidad: ser un axioma de identidad estipulado por *R7* consiste en ser de la forma $(a \frown id \frown a)$ siendo a una variable.

'AxIdl a' abrevia '(Eb)(Vbl b . $a = (b \frown id \frown b)$)'.

Puede definirse lo que es un axioma de identidad estipulado por *R8* del siguiente modo:

'AxId2 *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(E*d*)(E*e*)(Fmla *e* . Vbl *b* . Vbl *c* . Vbl *d* . *a* = (*b*⌢*id*⌢ *c dscd* (*d*⌢*epinv*⌢*e*⌢*b dscd d*⌢*epinv*⌢*e*⌢*c*)))'.

Puesto que hemos incluido los Axiomas de abstracción entre los axiomas lógicos de *L*, tenemos que definir también lo que es un axioma de este tipo.

'AxAbst *a*' abrevia '(E*b*) (E*c*) (E*d*) (E*e*) (Fmla *e* . *d* SLb?$^{b}_{e}$ *e* . ~*b* VLb *e* . *a* = (*b*⌢*epinv*⌢*d*⌢*c triguión e*))'.

Finalmente, una expresión *a* es un *axioma lógico* de *L* si y sólo si es un axioma de uno de los nueve tipos definidos.

'AxLog *a*' abrevia '(AxFV1 *a* .v. AxFV2 *a* .v. AxFV3 *a* .v. AxFV4 *a* .v. AxCuant1 *a* .v. AxCuant2 *a* .v. AxId1 *a* .v. AxId2 *a* .v. AxAbst *a*)'.

Llamamos específicamente a estos axiomas los axiomas *lógicos*; en efecto, como ya lo hemos observado, a éstos añadiremos generalmente otros axiomas que caractericen las propiedades o relaciones (de *L*) P, P', etc. Al final del capítulo anterior hemos dado algunos axiomas no lógicos para varios *L*, que no consideraremos ahora con más detalle; pero de lo que acabamos de ver se desprende claramente el método que hay que seguir para definir rigurosamente en *M* lo que es un axioma descriptivo o no lógico de *L*. 'AxDes *a*' expresará que *a* es un axioma de este tipo, y ser un *axioma* de *L* consistirá, pues, en ser un axioma descriptivo o lógico de *L*.

'Ax *a*' abrevia '(AxLog *a* .v. AxDes *a*)'.

Más tarde, en el capítulo VI, estudiaremos los axiomas no lógicos de ciertos tipos particularmente importantes de lenguajes objeto.

F. 'Teorema de L'

Un *teorema* es la clase de fórmula que se obtiene usando las reglas del *Modus Ponens* y de generalización un número finito de veces a partir de los axiomas, y un teorema *lógico* es un teorema obtenido de este modo a partir de los axiomas lógicos. A partir de los ingredientes enmarcados puede decirse que una expresión *a* es un teorema lógico de *L* si y sólo si es un ingrediente enmarcado de una expresión *b*, cada ingrediente enmarcado de la cual es, o bien un axioma lógico o bien una consecuencia inmediata de ingredientes enmarcados anteriores de *b*.

'TeorLog *b*' abrevia '(E*b*)(*a* IngEnm *b* . (*c*) (*c* IngEnm *b* :⊃: AxLog *c* .v. (E*d*)(E*e*) (*d* Ant$_{b}$ *c* . *e* Ant$_{b}$ *c* . *c* CI *d*, *e*)))'.

Análogamente, decir que *a* es un teorema (simbolizado por 'Teor *a*') es definible remplazando 'AxLog *c*' en este definiens por 'Ax *c*'.

El concepto de teorema es uno de los más importantes de la sintaxis (elemental): cualquier otra idea sintáctica necesaria puede definirse a base de este concepto. En el lenguaje *M*, tan restringido, tenemos, pues, una base adecuada para la sintaxis de *L*.

También puede ser conveniente en algún momento hablar de un *teorema descriptivo*, definido del siguiente modo:

'TeorDes *a*' abrevia '(Teor *a* . ~TeorLog *a*)'.

Definiremos ahora dos o tres conceptos que han de ser útiles en lo sucesivo.

Se dice que una expresión *a* es una *función proposicional de (a lo sumo) una variable b* si y sólo si *a* es una fórmula y cada variable libre de *a* es la misma que *b*, pudiendo *b* ser o no una variable libre de *a*.

'FuncPropUna *a*, *b*' abrevia '(Fmla *a* . Vbl *b* . (*c*) (*c* VLb *a* .⊃. *c* = *b*))'.

De un modo análogo puede decirse que *a* es una función proposicional de (a lo sumo) dos variables *b* y *c*.

'FuncPropDos *a*, *b*, *c*' abrevia '(Fmla *a* . Vbl *b* . Vbl *c* . ~*b* = *c* (*d*)(*d* VLb . *a* : ⊃ : *d* = *b* .v. *d* = *c*))'.

Ya ha sido definido lo que se entiende por constante predicativa primitiva. Definiremos ahora un concepto ligado a éste, el de *constante predicativa monádica*: las constantes predicativas monádicas incluyen la constante predicativa primitiva 'P' y además aquellos abstractos (monádicos) que no contienen variables libres (cualquier abstracto de este tipo expresa una propiedad, y por ello puede ser adecuadamente considerado como constante predicativa (monádica), cosa que ya hemos observado en (II, D)).

'ConsPred *a*' abrevia '(*a* = *pe* .v. (E*b*)(E*c*) (FuncPropUna *c*, *b*. *a* = (*b*⌢*epinv*⌢*c*)))'.

(El empleo de 'constante' para designar abstractos que no contienen variables libres es algo desusado, pero nos va a ser de utilidad a cada momento.)

Una *proposición universal atómica* de *L* es cualquier proposición de la forma '(x) A' donde A no contenga más variable libre que x, como ya hemos indicado en (II, G).

'PropUnivAt *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(FuncPropUna *c*, *b* . *a* = (*b cu c*))'. Una *proposición universal* es, pues, toda expresión que se pueda obtener a partir de proposiciones universales atómicas mediante un número finito de aplicaciones de la negación y la disyunción. Luego este concepto puede definirse por el método de los ingredientes enmarcados.

'PropUniv *a*' abrevia '(E*b*)(*a* IngEnm *b* . (*c*) (*c* IngEnm *b* : ⊃ : PropUnivAt *c* .v. (E*d*) (E*e*) (*d* Ant$_b$ *c* . *e* Ant$_b$ *c* : *c* = (*d uve e*) .v. *c* = (*tilde d*))))'.

Está claro que toda proposición de *L* es, o bien una proposición universal atómica o bien una proposición universal no atómica. (Véase más adelante, *TG9h*.) Los conceptos de proposición universal atómica y de proposición universal serán particularmente útiles para definir el concepto semántico de verdad para *L* en (V,A).

Lo que se entiende por *sarta de cuantificadores universales* puede definirse como sigue.

'SartaCuant *a*' abrevia '(E*b*)) (*a* IngEnm *b* . (*c*) (*c* IngEnm *b* :⊃: (E*d*)(Vbl *d* . *c* = (*pi*⌢*d*⌢*pd*)) .v. (E*d*) (E*e*) (*d* Ant$_b$ *c* . *e* Ant$_b$ *c* . *c* = (*d*⌢*e*))))'.

Se llama *clausura* de b a toda expresión a que no contenga variables libres y que se componga de una sarta de cuantificadores universales prefijada a b.

'a Clau b' puede abreviar '((Ec) (SartaCuant c . $a = (c \frown b)$) . $\sim$(Ed) d VLb a.

Según esta definición, cualquier expresión de L puede tener una clausura, pero es evidente que las clausuras más importantes serán clausuras de fórmulas. Es tambien conveniente muchas veces hablar de clausuras de tal modo que una *proposición* sea su *propia* clausura, por cuyo motivo establecemos que

'a Clau' b' abrevia '((Prop b . $a = b$) .v. ($\sim$Prop b . a Clau b))'.

Quizá el concepto en cierto modo artificial de *aparición*, definido anteriormente, en el § D —y del cual dependen, como hemos visto, muchos importantes conceptos sintácticos—, esté hasta cierto punto reñido con la intuición; en todo caso, no parece haber muchas razones para identificar las apariciones con segmentos iniciales (como hicimos allí), salvo la de que resulta técnicamente conveniente. Pero también es posible definir sin dificultad estos mismos conceptos, si se quiere, sin emplear el de aparición: a fin de ver esto, introducimos por medio de ingredientes enmarcados una definición que incluye una *inducción simultánea*, es decir, una inducción con respecto a dos variables (se pueden extender fácilmente estos métodos de modo que se tenga una inducción también con respecto a tres o más variables). Podemos definir ante todo

'(a;b) IngEnm c' como '(Ed)(d IngEnm c . $d = (a \frown uve \frown uve \frown b)$. $\sim$($uve \frown uve$) Seg a . $\sim$($uve \frown uve$) Seg b)',

'(a;b) Ant$_e$ (c;d)' como '(Ea')(a' Ini e . (a;b) IngEnm a' . (c;d) IngEnm e . $\sim$(c;d) IngEnm a')',

y

'a VLb b' como '(Vbl a . (Ec)(b IngEnm c . (d)(d IngEnm c : $\supset$: $d = (pe \frown a)$. v . (Ea')(Eb')(Ec')(Ed')(Vbl a' . Vbl b' . Vbl c' . Vbl d' : $d = (pe \frown ac \frown a \frown a')$. v . $d = (pe \frown ac \frown a' \frown a)$. v . $d = (pe \frown ac \frown ac \frown a \frown b' \frown c')$. v . $d = (pe \frown ac \frown ac \frown b' \frown a \frown c')$. v . ... . v . $d = (pe \frown ac \frown ac \frown ac \frown ac \frown a' \frown b' \frown c' \frown d' \frown a)$) . v . (E$a'$)(E$b'$)(Vbl a' . Fmla b' . $d = (a' \frown epinv \frown b' \frown a)$) . v . (E$e$)($e$ Ant$_e$ d : $d = (tilde\ e)$. v . (Ea')(Fmla a' : $d = (a'\ uve\ e)$. v . $d = (e\ uve\ a')$) . v . (Eb')(Vbl b' . $\sim a = b'$. $d = (b'\ cu\ e)$) . v . (Eb')(Ec')(Vbl b' . Vbl c' . $\sim a = b'$. $\sim a = c'$. $d = (b' \frown epinv \frown e \frown c')$))))))'.

Después, por una especie de inducción simultánea,

'a SLb?^b_e d' abrevia '(Vbl b . Vbl c : ($\sim c$ VLb d . $a = d$) . v . (Ee) ((a;d) IngEnm e . (a')(b')((a';b') IngEnm e : $\supset$: ($b' = (pe \frown c)$) . ($a' = (pe \frown b)$) . v . $a' = b'$)) . v . (Ea'')(Eb'')(Ec'')(Ed'')(Vbl a'' . Vbl b'' . Vbl c'' . Vbl d'' : ($b' = (pe \frown ac \frown c \frown a'')$. ($a' = (pe \frown ac \frown b \frown a'')$. v . $a' = b'$)) . v . ($b' = (pe \frown ac \frown a'' \frown c)$. ($a' = (pe \frown ac \frown a'' \frown b)$. v . $a' = b'$)) . v . ... . v . ($b' = (pe \frown ac \frown ac \frown ac \frown ac \frown a'' \frown b'' \frown c'' \frown d'' \frown c)$. ($a' = (pe \frown ac \frown ac \frown ac \frown ac \frown a'' \frown b'' \frown c'' \frown d'' \frown b)$. v . $a' = b'$)) . v . (Ec')(Ed')(Vbl c' . Fmla d' . $b' = (c' \frown epinv \frown d' \frown c)$. ($a' = (c' \frown epinv \frown d' \frown b)$. v . $a' = b'$)) . v . (Ec')(Ed')(Ea'')(Eb'')((c';d') Ant$_e$ (a';b') . (a'';b'') Ant$_e$ (a';b') : ($a' = (tilde\ c')$. $b' = (tilde\ d')$) . v . ($a' = (c'\ uve\ a'')$. $b' = (d'\ uve\ b'')$) . v . (Ee')(Vbl e' . $\sim e' = b$. $\sim e' = c$. $a' = (e'\ cu\ c')$. $b' = (e'\ cu\ d')$) . v .

$(\mathrm{E}c'')(\mathrm{E}d'')(\mathrm{Vbl}\ c''\ .\ \mathrm{Vbl}\ d''\ .\ \sim c'' = b\ .\ \sim c'' = c\ :\ (a' = (c''\frown epinv\frown c'\frown d'')\ .\ b' = (c''\frown epinv\frown d'\frown d''))\ .\ \mathrm{v}\ .\ (a' = (c''\frown epinv\frown c'\frown b)\ .\ b' = (c''\frown epinv\frown d'\frown c)))))))$'.

En lo sucesivo utilizaremos poco estas definiciones; sin embargo, son intuitivamente adecuadas, y ofrecen la posibilidad de captar lo que se entiende por variable libre y lo que implica 'SLb?' sin emplear el concepto de aparición. Y los restantes conceptos sintácticos necesarios se pueden definir a partir de ellas del mismo modo que antes.

G. Algunos teoremas sintácticos

Ya hemos demostrado en el § C algunos teoremas elementales de *M;* daremos aquí unos cuantos teoremas ulteriores. La mayoría de éstos tienen cierto interés intrínseco, bien porque enuncian importantes propiedades del encadenamiento o de los diversos conceptos definidos, bien por su utilidad en los capítulos siguientes. Omitimos la mayor parte de las demostraciones.

Los primeros teoremas enuncian propiedades evidentes referentes a Ini, Acab y Seg.

TG1a. $\vdash a\ \mathrm{Ini}\ a\ .\ a\ \mathrm{Ini}\ (a\frown b)$.

TG1b. $\vdash a\ \mathrm{Ini}\ b\ .\ b\ \mathrm{Ini}\ c : \supset : a\ \mathrm{Ini}\ c$.

TG1c. $\vdash a\ \mathrm{Acab}\ a\ .\ a\ \mathrm{Acab}\ (b\frown a)$.

TG1d. $\vdash a\ \mathrm{Acab}\ b\ .\ b\ \mathrm{Acab}\ c : \supset : a\ \mathrm{Acab}\ c$.

TG1e. $\vdash a\ \mathrm{Acab}\ b\ .\ \supset\ .\ a\ \mathrm{Acab}\ (c\frown b)$.

TG1f. $\vdash a\ \mathrm{Ini}\ b\ .\ \supset\ .\ (c\frown a)\ \mathrm{Ini}\ (c\frown b)$.

TG2a. $\vdash a\ \mathrm{Seg}\ a\ .\ a\ \mathrm{Seg}\ (a\frown b)\ .\ a\ \mathrm{Seg}\ (b\frown a)\ .\ a\ \mathrm{Seg}\ ((b\frown a)\frown c)$.

Sus demostraciones son inmediatas. Algunos de ellos conducen a la ley de transitividad para Seg:

TG2b. $\vdash a\ \mathrm{Seg}\ b\ .\ b\ \mathrm{Seg}\ c : \supset : a\ \mathrm{Seg}\ c$.

La demostración es obvia si se desarrolla paso a paso del modo siguiente. Primero, por *TG1b*,

$\vdash a\ \mathrm{Acab}\ d\ .\ d\ \mathrm{Ini}\ b\ .\ b = e\ .\ e\ \mathrm{Ini}\ c : \supset : (\mathrm{E}d)(a\ \mathrm{Acab}\ d\ .\ d\ \mathrm{Ini}\ c)$.

Pero también, en virtud de *TG1e*, *TG1f* y *TG1b*,

$\vdash a\ \mathrm{Acab}\ d\ .\ d\ \mathrm{Ini}\ b\ .\ e = (a'\frown b)\ .\ e\ \mathrm{Ini}\ c : \supset : a\ \mathrm{Acab}\ (a'\frown d)\ .\ (a'\frown b)\ \mathrm{Ini}\ c$.

Combinando debidamente estas dos expresiones obtenemos *TG2b.*

Recordaremos que, por la definición de 'Seg', *a* Seg *b* si y sólo si *a* acaba cierta expresión que inicia *b*. El siguiente teorema es interesante, pues pone de manifiesto que esto equivale a decir que *a inicia* cierta expresión que *b acaba.*

TG2c. $\vdash a\ \mathrm{Seg}\ b\ .\ \equiv\ .\ (\mathrm{E}c)(a\ \mathrm{Ini}\ c\ .\ c\ \mathrm{Acab}\ b)$.

La demostración es inmediata en vista de los teoremas anteriores.

Las leyes siguientes enuncian propiedades evidentes de la anterioridad:

TG3a. $\vdash a\ \mathrm{Ant}_b\ c : \supset : \sim c\ \mathrm{Ant}_b\ a\ .\ \sim b\ \mathrm{Ant}_c\ a\ .\ \sim a\ \mathrm{Ant}_c\ b\ .\ \sim c\ \mathrm{Ant}_a\ b\ .\ \sim b\ \mathrm{Ant}\ c$.

TG3b. $\vdash \sim a\ \mathrm{Ant}_a\ a\ .\ \sim a\ \mathrm{Ant}_b\ a\ .\sim b\ \mathrm{Ant}_a\ a\ .\ \sim a\ \mathrm{Ant}_a\ b$.

TG3c. $\vdash a = (pi \frown pd \frown b \frown pi \frown pd \frown c \frown pi \frown pd) \ . \sim(pi \frown pd)$ Seg $b \ . \sim(pi \frown pd)$ Seg $c : \supset : b$ Ant$_a$ c.

TG3d. $\vdash \sim a = b \ . \ a$ IngEnm $c \ . \ b$ IngEnm $c : \supset : a$ Ant$_c$ $b \ .$ v $. \ b$ Ant$_c$ a.

Encontramos ahora una ley muy importante, que es útil para demostrar propiedades adecuadas a los conceptos definidos por medio de ingredientes enmarcados. Esta ley, la *Regla de ingredientes enmarcados*, es la siguiente:

TG4. $\vdash a$ IngEnm $b \ . \ (c)(c$ IngEnm $b : \supset : \mathbf{F}c \ .$ v $. \ (\mathrm{E}d)(\mathrm{E}e)(d$ Ant$_b$ $c \ . \ e$ Ant$_b$ $c \ . \ \mathbf{A})) \ . \ (c)(\mathbf{F}c \ . \supset . \ \mathbf{G}c) \ . \ (c)(d)(e)(\mathbf{G}d \ . \ \mathbf{G}e \ . \ \mathbf{A} : \supset : \mathbf{G}c) : \supset : \mathbf{G}a$, si **A** es una fórmula de M que no contiene más variables libres que 'c', 'd' y 'e'.

Aunque esta regla parece larga y algo complicada, de hecho es sumamente sencilla: establece *grosso modo* que si cada ingrediente enmarcado de una expresión b tiene determinada propiedad o puede ser obtenido a partir de ingredientes anteriores de b mediante cierta operación (expresada por **A**), y si cada expresión que tiene dicha propiedad tiene una segunda propiedad que está incluida en la operación dada, entonces cada ingrediente enmarcado de b tiene esta segunda propiedad (en realidad, la regla es algo más complicada, pero no en sus aspectos esenciales). Esta regla nos permite lograr el efecto de una especie de inducción matemática. Su demostración no es difícil gracias a la Regla de inducción infinita, y puede esbozarse someramente del siguiente modo. Tomemos primero 'b' como descripción estructural de una expresión de L que no contenga ningún ingrediente enmarcado; entonces deja de darse la hipótesis de *TG4*, 'a IngEnm b'. Supongamos ahora que 'b' se toma como descripción estructural de una expresión que contenga un solo ingrediente enmarcado; si a no es este ingrediente enmarcado, deja otra vez de darse la hipótesis y con ella *TG4;* por otra parte, si a es este ingrediente enmarcado, entonces no hay ningún ingrediente anterior, luego (por la segunda hipótesis de *TG4)* a tiene la propiedad indicada por **F**, y también la indicada por **G** (por la tercera hipótesis). Por tanto, *TG4* es válido para 'b' tomado como descripción estructural de una expresión de L que contenga un solo ingrediente enmarcado. Si se toma 'b' como descripción estructural de una expresión que contenga dos ingredientes enmarcados idénticos entre sí, entonces el razonamiento es análogo. Tomemos después 'b' como descripción estructural de una expresión que contengan dos ingredientes enmarcados distintos; por *TG3d*, uno de estos ingredientes será anterior al otro: si a es el primero de ambos, entonces, por las hipótesis segunda y tercera de *TG4*, tendrá también la propiedad indicada por **G**; si a no es el primero de ambos, sabemos por la proposición anterior que el otro ingrediente, digamos a', tendrá dicha propiedad; por otra parte, y en virtud de la segunda hipótesis, a o bien tiene la propiedad indicada por **F**, o bien puede obtenerse a partir de ingredientes anteriores a a mediante determinada operación; pero en nuestro caso, a' es el único ingrediente anterior a a a partir del cual éste pueda ser obtenido mediante esta operación, y a' tiene la propiedad indicada por **G**; como (por la cuarta hipótesis de *TG4)* la propiedad indicada

por G se da en las expresiones obtenidas aplicando esta operación a expresiones que tienen dicha propiedad, *a* tiene también la propiedad indicada por G. Si tomamos ahora '*b*' como descripción estructural de una expresión que contenga tres o más ingredientes enmarcados, el razonamiento es análogo. Se concluye que *TG4* es válido para '*b*' tomado como una descripción estructural cualquiera, luego, por *RSin4*, también lo es para la variable '*b*'.

Tenemos asimismo el siguiente lema:

TG5a. ⊢ Fmla *a* . ⊃ . Fmla (*tilde a*).

La demostración es inmediata si observamos que

⊢ *a* IngEnm *b* . (*c*)(*c* IngEnm *b* : ⊃ : FmlaAt *c* . v . (E*d*)(E*e*)(*d* Ant_b *c* . *e* Ant_b *c* : *c* = (*tilde a*) . v . *c* = (*d uve e*) . v . *c* Gen *d* . v . *c* Abst *d*)) . *a'* = (*b*∩*pi*∩*pd*∩*tilde a*∩*pi*∩*pd*) : ⊃ : (*tilde a*) IngEnm *a'* . *a* $\text{Ant}_{a'}$ (*tilde a*) . (*c*)(*c* IngEnm *a'* : ⊃ : FmlaAt *c* . v . (E*d*)(E*e*)(*d* $\text{Ant}_{a'}$ *c* . *e* $\text{Ant}_{a'}$ *c* : *c* = (*tilde d*) . v . *c* = (*d uve e*) . v . *c* Gen *d* . v . *c* Abst *d*)).

De un modo parecido se puede demostrar que

TG5b. ⊢ Fmla *a* . Fmla *b* : ⊃ : Fmla (*a uve b*),

TG5c. ⊢ Fmla *a* . *b* Gen *a* : ⊃ : Fmla *b*,

y que

TG5d. ⊢ Fmla *a* . *b* Abst *a* : ⊃ : Fmla *b*.

Empleando *TG5a*-*TG5d*, puede hacerse ver que

TG5e. ⊢ AxFV1 *a* . ⊃ . Fmla *a*,

TG5f. ⊢ AxFV2 *a* . ⊃ . Fmla *a*,

y análogamente para los otros axiomas. Pueden resumirse estos teoremas haciendo observar que

TG6a. Ax *a* . ⊃ . Fmla *a*.

Adviértase también que

TG6b. ⊢ Fmla *a* . Fmla *b* . *c* MP *a*,*b* : ⊃ : Fmla *c*.

Ahora, usando la Regla de ingredientes enmarcados, se puede demostrar que

TG6c. ⊢ Teor *a* . ⊃ . Fmla *a*.

Por *TG4*,

⊢ *a* IngEnm *b* . (*c*)(*c* IngEnm *b* : ⊃ : Ax *c* . v . (E*d*)(E*e*)(*d* Ant_b *c* . *e* Ant_b *c* . (*c* Gen *d* . v . *c* MP *d*,*e*))) . (*c*)(Ax *c* . ⊃ . Fmla *c*) . (*c*)(*d*)(*e*) (Fmla *d* . Fmla *e* . (*c* Gen *d* . v . *c* MP *d*,*e*) : ⊃ : Fmla *c*) : ⊃ : Fmla *a*.

Por *TG6a* puede abandonarse la tercera de estas hipótesis, y la cuarta por *TG6b* y *TG5c*.

Tenemos también el siguiente enunciado formal de la Regla de generalización:

TG7a. ⊢ Teor *a* . *b* Gen *a* : ⊃ : Teor *b*.

La demostración es bastante parecida a la de *TG5c*. El enunciado formal de la Regla del *Modus Penens* es:

TG7b. ⊢ Teor *a* . Teor *b* . *c* MP *a*,*b* : ⊃ : Teor *c*.

La demostración es análoga a la de *TG6b*.

Damos a continuación una lista de teoremas que pueden ser útiles más adelante.

TG8a. ⊢ SP *a* . ∼*a* = *pe* : ⊃ : ∼ConsPred *a*.

TG8b. ⊢ FuncPropUna *a*,*b* : ≡ : ConsPred (*b*∩*epinv*∩*a*) . Vbl *b*.

TG8c. ⊢ Prop *a* . Vbl *b* : ⊃ : FuncPropUna *a*,*b*.

TG8d. $\vdash$ Prop a . Prop (a *uve* b) : $\supset$: Prop b.
TG8e. $\vdash$ Prop a . $\supset$. Prop (*tilde* a).
TG8f. $\vdash$ FuncPropUna a,b . Vbl c : $\supset$: (Ed)(d SLb^c_b a.
TG8g. $\vdash$ ConsPred (a∩*epinv*∩b) . Vbl a . ~a VLb b : $\supset$: Prop b.
TG8h. $\vdash$ FuncPropUna a,b . Vbl c : $\supset$: FuncPropUna (c *cu* a),b.
TG8i. $\vdash$ FuncPropUna a,b . c SLb^d_b a : $\supset$: FuncPropUna c,d.
TG8j. $\vdash$ FuncPropUna a,b . b VLb a . d SLb^c_b a : $\equiv$ FuncProp Una d,c . d VLb c . a SLb^c_b d.
TG8k. $\vdash$ FuncPropUna a,b . ~b VLb a : $\supset$: Prop a . Vbl b.
TG8l. $\vdash$ c SLb^d_b a . $d = b$: $\supset$: $c = a$.
TG9a. $\vdash$ FuncPropUna b',d . FuncPropUna c',e . d' SLb^d_e c' : $\supset$: FuncPropUna d',d . FuncPropUna (b' *uve* d'),d.
TG9b. $\vdash$ c SLb^b_a e . ~b VLb e : $\equiv$: e SLb^d_b c . ~d VLb c : $\equiv$: c SLb^b_a e . e SLb^d_b c.
TG9c. $\vdash$ Prop a . Vbl d . b = (d *cu* a) : $\supset$: d ~VLb a . Prop b.
TG9d. $\vdash$ Teor (e *dscd* c) . Fmla e . Fmla c . Teor (e *dscd tilde* c) : $\supset$: (a)(Fmla a . $\supset$. Teor (e *dscd* a)).
TG9e. $\vdash$ Teor (a *dscd* b) . Fmla a . Fmla b . Teor (*tilde* a *dscd* b) : $\supset$: Teor b.
TG9f. $\vdash$ (a)(d)(ConsPred (a∩*epinv*∩d) . Vbl a : $\supset$: Teor (d *dscd* b)). Vbl c : $\supset$: (a)(d)(ConsPred (a∩*epinv*∩d) . Vbl a : $\supset$: Teor (d *dscd* c *cu* b)).
TG9g. $\vdash$ ConsPred (*qis*∩*epinv*∩*tilde*∩*pi*∩*pe*∩*qis*∩*uve*∩*tilde*∩*pe*∩*qis* ∩*pd*).
TG9h. $\vdash$ Prop a : $\supset$: PropUnivAt a . v . (~PropUnivAt a . PropUniv a).

TG10a. $\vdash$ Prop a . Prop (a *dscd* b) : $\supset$: Prop b.
TG10b. $\vdash$ ConsPred a . ~ConsPredPrim a : $\equiv$: (Eb)(Ec)(a = (b∩ *epinv*∩c) . FuncPropUna c,b).
TG10c. $\vdash$ a = (b∩*epinv*∩c) . FuncPropUna c,b . a = (d∩*epinv*∩e) . FuncPropUna e,d : $\supset$: $b = d$. $c = e$.
TG11. $\vdash$ Fmla a . b Clau a : $\supset$: Prop b.
TG12a. $\vdash$ Teor a . b Abst a : $\supset$: Teor b.
TG12b. $\vdash$ Teor (*tilde* a) . b Abst a : $\supset$: Teor (*tilde* b).
TG12c. $\vdash$ Teor a . $\supset$. (Eb)(b Clau′ a . Fb) : $\supset$: (Prop a . Teor a : $\supset$: Fa).

Cada expresión a de L es un ingrediente enmarcado de un determinado b, cada ingrediente enmarcado del cual es o bien un signo primitivo de L o bien la cadena de ingredientes enmarcados de L anteriores.

TG13. $\vdash$ (a)(Eb)(a IngEnm b . (c)(c IngEnm b : $\supset$: SP c . v . (Ed)(Ee)(d Ant$_b$ c . e Ant$_b$ c . c = (d∩e)))).

Esta regla, la *Regla de expresiones*, será útil más tarde; se demuestra por inducción según *TC3a* y varios teoremas referentes a 'IngEnm' y 'Ant'; puede también demostrarse por *RSin4*.

Utilizando *TG13* y *TG4* podemos demostrar una Regla de inducción algo más fuerte que *TC3a*.

TG14. $\vdash$ (a)(SP a . $\supset$. Fa) . (a)(b)(Fa . Fb : $\supset$: F(a∩b)) : $\supset$: (a)Fa.

Finalmente, se puede dar otro posible conjunto de axiomas para M del siguiente modo: podemos abandonar la Regla de inducción infinita,

RSin4, y tomar en su lugar la Regla de expresiones (*TG13*) y la Regla de ingredientes enmarcados (*TG4*); comprobamos que todos los teoremas de este capítulo pueden ser demostrados a base de estas reglas, junto con *RSin1-RSin3*. Conservaremos *RSin4* para nuestros fines *semánticos* en los próximos primeros capítulos, pero más tarde (en V, H y VIII,D) prescindiremos asimismo de ella.

H. Algunos conceptos ulteriores de sintaxis

Antes de entrar en la semántica propiamente dicha, veamos unos cuantos conceptos sintácticos más, que pueden ser útiles más tarde.

El concepto de *teorema* ha sido definido ya rigurosamente (en el § F), pero no el de *demostración*. Sin embargo, está claro que

'*b* Dems *a*' puede abreviar '(*a* IngEnm *b* . (*c*)(*c* IngEnm *b* : ⊃ : Ax *c* . v . (E*d*)(E*e*)(*d* Ant_b *c* . *e* Ant_b *c*. *c* CI *d*,*e*)) . ∼(E*c*)*a* Ant_b *c*)'.

Una expresión *b* es una demostración de *a* si y sólo si *a* es el último ingrediente enmarcado de *b* (el situado más a la derecha), cada ingrediente enmarcado del cual es o bien un axioma o bien una consecuencia inmediata de anteriores ingredientes enmarcados de *b*.

Tenemos inmediatamente que

TH1. ⊢ Teor *a* . ≡ . (E*b*)*b* Dems *a*.

Es útil con frecuencia hablar no sólo de demostraciones, sino también de *deducción* a partir de premisas dadas [1]. Que *a* es deductible de *b* se define del modo siguiente:

'*a* Deduc *b*' abrevia '(Fmla *b* . (E*c*)(*a* IngEnm *c* . (*d*)(*d* IngEnm *c* : ⊃ : *d* = *b* . v . Ax *d* . v . (E*a*′)(E*b*′)(*a*′ Ant_c *d* . *b*′ Ant_c *d* . *d* CI *a*′,*b*′)) . ∼(E*d*)*a* Ant_c *d*))'.

Obsérvese que en una demostración partimos sólo de axiomas, mientras que en una deducción a partir de la premisa *b*, podemos partir de axiomas o de la premisa *b*.

Si *a* es un teorema, entonces es deductible a partir de cualquier fórmula, e inversamente.

TH2. ⊢ Teor *a* . ≡ . (*b*)(Fmla *b* . ⊃ . *a* Deduc *b*).

La demostración es inmediata.

En un momento dado puede interesarnos hablar de deducción, no ya a partir de una premisa dada *b*, sino a partir de una clase (virtual) de premisas.

'*a* Deduc F' abrevia '((*b*)(F*b* . ⊃ . Fmla *b*) . (E*c*)(*a* IngEnm *c* . (*d*)(*d* IngEnm *c* : ⊃ : F*d* . v . Ax *d* . v . (E*a*′)(E*b*′)(*a*′ Ant_c *d* . *b*′ Ant_c *d* . *d* CI *a*′,*b*′)) . ∼(E*d*)*a* Ant_c *d*))'.

Sea por el momento 'Λ' la abreviatura de '*a*ɜ∼*a* = *a*': entonces Λ es la clase nula (virtual) de expresiones de *L*, y los teoremas de *L* son precisamente aquellas expresiones que son deductibles de Λ.

TH3. ⊢ Teor *b* . ≡ . *b* Deduc Λ.

---

[1] Carnap, especialmente, ha hecho resaltar la importancia del concepto de deducción.

A veces es útil poder decir que una clase (virtual) de fórmulas es *coherente* o *compatible.*

'Coher F' abrevia '(*a*)(F*a* : ⊃ : Fmla *a* . ~(Teor *a* . Teor (*tilde a*)))'. Una clase virtual de fórmulas es coherente si y sólo si no contiene una fórmula *a* tal que *a* y su negación sean ambas demostrables (ésta es una definición muy obvia de la coherencia, que parece fundamentalmente acorde con las concepciones tradicionales; hay otros tipos de coherencia o compatibilidad, algunos de los cuales son sintácticos y otros semánticos: el que aquí damos es puramente sintáctico y parece adecuado, porque *L* contiene '~' y, por tanto, si *a* es una fórmula de *L*, (*tilde a*) lo es también).

Se puede definir la coherencia de una clase de *proposiciones* remplazando aquí 'Fmla' por 'Prop'.

Podemos definir la *completitud* de una clase (virtual) de *proposiciones* como sigue:

'Cmplt F' abrevia '(*a*)(F*a* :⊃: Prop *a* . (Teor. *a* .v. Teor (*tilde a*)))'.

Una clase virtual de proposiciones es completa si y sólo si dado uno cualquiera de sus miembros, *a*, *a* es un teorema de *L* o lo es su negación.

Estos conceptos sintácticos exactos corresponden a los conceptos de coherencia y completitud tratados de modo no formalizado en (I,C).

Sea por el momento 'V' la abreviatura de '*a*∃Prop *a*'; V es, pues, la clase (virtual) universal de proposiciones de *L*. Dentro de *M*, decir que *L* es coherente implica simplemente decir que Coher V o Coher *a*∃Fmla *a*. Análogamente, 'Cmplt V' dice dentro de *M* que *L* es completo en el sentido definido. Para un *L* adecuado, estas fórmulas pueden incluso ser demostrables en *M*; en todo caso, demostrables o no, existen sistemas *L* para los cuales ambas fórmulas son válidas (esta circunstancia será útil más adelante, en (IX, G)). Existen, pues, lenguajes objeto *L* que son a la vez coherentes y completos, y también otros *L* que son coherentes pero no completos; pero no existe ninguno que sea a la vez incoherente e incompleto.

TH4. ⊢(*a*) (F*a* . ⊃ . Prop *a*) .~Coher F :⊃: Cmplt F.

La demostración es inmediata.

Dos fórmulas son *deductivamente equivalentes* si y sólo si cada una es un teorema si y sólo si la otra lo es también.

'*a* DedEquiv *b*' abrevia '(Fmla *a* . Fmla *b* . (Teor *a* . ≡ . Teor *b*))'. El siguiente teorema es inmediato.

TH5. ⊢ Fmla *a* . Fmla *b* . Teor (*a triguión b*) :⊃: DedEquiv *b*.

Pero *a* y *b* pueden ser deductivamente equivalentes aun cuando (*a triguión b*) no sea un teorema, luego lo que es esencialmente la fórmula inversa del teorema estipulado por *TH5* no es válida.

No hemos agotado, en modo alguno, los conceptos y teoremas sintácticos que serán útiles en lo sucesivo; pero en vez de darlos aquí, lo haremos más adelante, en aquellos lugares en que sean necesarios.

CAPÍTULO IV

Denotación múltiple: Semántica de primer orden

La semántica estudia principalmente ciertas relaciones existentes entre las expresiones lingüísticas de un lenguaje determinado y los objetos o entidades acerca de los cuales dichas expresiones nos permiten hablar (son éstas las llamadas *relaciones semánticas)*; y trata también fundamentalmente del concepto de verdad. Genéticamente, parecen haber sido más estudiadas las relaciones semánticas, que han desempeñado un papel importante en la historia de la disciplina; sin embargo, a base de estas relaciones es posible, asimismo, definir un concepto riguroso de verdad, y por ello la semántica es ahora la teoría de las relaciones semánticas, la teoría de la verdad y la teoría de las relaciones mutuas entre las dos anteriores.

A fin de desarrollar deductivamente un metalenguaje semántico formalizado, parece a la vez útil y conveniente tomar ciertas relaciones semánticas como elementos primitivos. A lo largo de este libro consideraremos varios elementos primitivos diferentes, si bien en este capítulo y el siguiente nos proponemos formular una semántica de primer orden para un L dado tomando como único elemento primitivo semántico una relación de *denotación múltiple*. En el § A trataremos sin rigor formal de la índole de esta relación primitiva. En el § B esbozaremos con algún detalle el *metalenguaje semántico* de L basado en la denotación múltiple, y en el § C daremos *definiciones* de varios conceptos semánticos importantes. Los *axiomas* de este metalenguaje semántico se incluyen en el § D, y algunas de sus consecuencias elementales en el § E. En el § F damos algunas consecuencias ulteriores, en particular aquéllas que permiten una especie de *álgebra booleana* cuyos elementos son las constantes predicativas de L.

A. Denotación múltiple

'Denotación' puede emplearse de varias maneras: puede decirse que una constante individual, de clase o de relación, denota su objeto; también puede decirse que lo que suele llamarse una clase o término de propiedad denota los miembros de la clase en cuestión; e incluso se puede hablar de denotación en un sentido más amplio, según el cual,

por ejemplo, las proposiciones denotan enunciados o valores de verdad. Aquí emplearemos 'denotación' únicamente en el segundo de estos tres sentidos, según el cual se dice que los predicados denotan los objetos a los cuales se aplican: por ejemplo, puede decirse que perro denota a cada uno de los perros Leal, Lulú, etc., en particular; los que generalmente se llaman nombres de clase vienen así a denotar los diversos miembros de la clase, pero no la clase misma. La denotación entendida en este sentido es una relación semántica muy simple y de gran alcance. El lenguaje objeto L no contiene constantes individuales y, por tanto, no necesitamos una relación de denotación en el primero de los tres sentidos enumerados (véase, sin embargo, (X, B)). Y puesto que el punto de vista que adoptamos en todo el libro es totalmente extensional, tampoco será necesaria una relación de denotación en el tercer sentido.

La concepción que subyace a los metalenguajes semánticos de este capítulo y del próximo consiste en que la denotación múltiple es la relación fundamental de la semántica. Esto es, desde luego, algo arbitrario, y para algunos fines habría que considerar fundamentales otras relaciones; pero los nombres o expresiones denotadoras (en cierto sentido) parecen haber sido, a través de la historia, los elementos básicos de la semántica, así como los números enteros han sido siempre en cierto modo los elementos básicos de la matemática; todos los demás conceptos que se requieren son definibles a partir de la denotación múltiple. La idea de que ésta es fundamental no requiere una justificación explícita; de la presentación de nuestra teoría surgirá un argumento implícito en tal sentido, al observar la sencillez y generalidad de aquélla cuando se la compara con otras formulaciones parecidas de la semántica.

Utilicemos 'Den' para expresar la relación primitiva de denotación múltiple: 'Den' será el único elemento primitivo semántico del metalenguaje semántico de un lenguaje objeto L dado. Ahora bien ¿qué debe considerarse que denota significativamente y a qué? Evidentemente debe considerarse que las *expresiones* denotan *objetos;* las expresiones tendrán que ser precisamente las de L y los objetos sólo los del dominio fundamental de L (en realidad, puede considerarse que las expresiones y los objetos de L constituyen dos dominios mutuamente excluyentes, aunque esto no sea esencial): 'Den' representará, pues, una relación cuyo dominio se compone de (ciertas) expresiones de L y cuyo codominio se compone de los objetos de L.

Hay ocasiones en que 'se aplica a' se usa en el sentido de denotación múltiple: así puede decirse que 'hombre' se aplica a cada uno de los hombres individuales. A veces se emplea en este mismo sentido la frase 'es verdadero de' o 'es predicable de'. Pero la frase 'se aplica a' se utiliza en lógica y matemáticas al hablar de la aplicación de una función a un argumento, de forma que quizá sea mejor no emplearla aquí en este sentido semántico como término técnico. Y quizá la única objeción contra el uso de 'es verdadero de' es que contiene la palabra 'verdadero' y que por tanto tiende a ocultar la diferencia existente entre la relación semántica aludida y la propiedad o concepto semántico de verdad.

B. Estructura primitiva

Llamemos MS_D^L al metalenguaje semántico de L que va a ser formulado sobre la base de 'Den', o sea, el metalenguaje semántico de L basado en la denotación múltiple [1].

La estructura de MS_D^L ha de ser considerablemente más complicada que la del metalenguaje sintáctico anterior, M: la semántica presupone la sintaxis y la contiene como una parte, de modo que un metalenguaje semántico debe comprender siempre una parte que sea un metalenguaje sintáctico. Aquí presuponemos M, y por ello MS_D^L puede considerarse en cierto sentido una apliación de M: en M únicamente podemos simbolizar relaciones entre expresiones de L, pero en MS_D^L debemos tener también símbolos que de un modo u otro representen a los objetos de L (esto es esencial si en MS_D^L hemos de poder expresar relaciones del tipo deseado). Un modo de conseguir esto es exigir que a cada expresión primitiva de L corresponda una expresión primitiva de MS_D^L. Se llama *traducción* de un símbolo dado de L [2] al símbolo de MS_D^L que corresponde de este modo a aquél. Debe entenderse que la cadena de dos expresiones traducentes cualesquiera de MS_D^L es la traducción de la cadena de las expresiones correspondientes de L. La correspondencia entre las expresiones de L y sus traducciones en MS_D^L es de una a una o biunívoca: es decir, que para cada expresión de L existe una y sólo una traducción correspondiente en MS_D^L.

El modo más sencillo de obtener las expresiones traducentes de MS_D^L consiste en dejar que cada símbolo primitivo de L sea su propia traducción en MS_D^L. Cada proposición o término que pueda formarse en L puede entonces también ser formado en MS_D^L y precisamente del mismo modo. Así, MS_D^L contiene todas las posibles expresiones de L. Pero como MS_D^L contiene también todas las posibles expresiones de M, podemos en MS_D^L hablar de —o *mencionar*— las expresiones de L, así como *usar* sus traducciones: mencionar las expresiones de un lenguaje es hablar acerca de las expresiones mismas; en cambio, usamos las expresiones de un lenguaje cuando hablamos de los objetos a los que dicho lenguaje se refiere (ya hemos encontrado antes esta distinción). De hecho, podemos mencionar las expresiones de L en MS_D^L del mismo modo que lo hacemos en M; pero, gracias a la presencia de elemento primitivo adicional 'Den' en MS_D^L, podemos relacionar las expresiones de L con los objetos de L, exigiendo que ciertas expresiones denoten ciertos objetos. Así, pues, MS_D^L contiene todos los modos de expresión de M así como las traducciones de los símbolos de L, y además 'Den'.

Vemos que MS_D^L contiene, hablando toscamente, cuatro partes: una parte lógica, una parte sintáctica, una parte traducente y una parte semántica. Las partes lógica y sintáctica son en lo esencial, como en M, aunque la lógica básica habrá de ser un poco más amplia (véase más adelante). Pero MS_D^L contiene también una traducción *in toto* del len-

[1] Este metalenguaje semántico es semejante a los estudiados por Tarski. Véase en especial el § 5 de *Der Wahrheitsbegriff*, donde, sin embargo, se toma como alemento primitivo un predicado para verdad en vez de 'Den'.

[2] La palabra 'traducción' se emplea aquí en el sentido estricto que le da Tarski.

guaje objeto *L*: la parte traducente puede ser el mismo lenguaje objeto *L* o cualquier lenguaje que corresponda con él del modo descrito. Finalmente, en la parte semántica de MS_D^L relacionamos, de un modo adecuado, las expresiones de *L* con sus denotados.

Recordemos que podemos tomar para *L* cualquier lenguaje de primer orden, con o sin inclusión de la identidad, ya lo sea en sentido amplio o en sentido estricto, tal como se ha descrito en el capítulo II. MS_D^L ha de ser también de primer orden, pero como contiene dos tipos diferentes de variables lo será solamente en el sentido tratado al final de (II, H); cada tipo de variables abarcato talidades de entidades bien especificadas. Debe considerarse que las traducciones de variables de *L* abarcan exactamente los objetos que abarcan las variables de *L*: en cuanto a las variables de expresión de MS_D^L, son simplemente las de *M* y abarcan expresiones de *L*. El que MS_D^L sea de primer orden en sentido amplio o estricto depende de *L*: si *L* es de primer orden en sentido estricto, entonces MS_D^L es también un lenguaje de primer orden en sentido estricto; pero si *L* es de primer orden en sentido amplio, MS_D^L debe también entenderse en este sentido. El carácter lógico de MS_D^L depende sólo de *L*, y no de los instrumentos sintácticos o semánticos de que dispone. Esta es una característica importante de MS_D^L, que está de acuerdo con la tendencia constructivista (véanse (VIII, F) y (XIII)).

La especificación completa del vocabulario primitivo de MS_D^L puede resumirse del siguiente modo:

Constantes lógicas primitivas: 'v', '~', '(', ')', 'ɜ', y '='.

Elementos primitivos traducentes (constantes predicativas): 'P', 'P'', ..., 'P''''''.

(Variables): '*x*', '*x*'', '*x*'', ...

Elementos primitivos descriptivo-estructurales (constantes individuales): '*uve*', '*tilde*', '*pi*', '*pd*', '*id*', '*epinv*' '*pe*', '*ac*', '*qis*'.

Elemento primitivo sintáctico (funtor): '⌢'.

Variables de expresión: '*a*', '*b*', '*c*', '*d*', '*e*', '*a*'', ...

Elemento primitivo semántico (constante de relación): 'Den'.

Adviértase que entre los elementos traducentes primitivos no incluimos traducciones de las constantes lógicas de *L*, pues éstas nos vienen ya dadas por las constantes lógicas de MS_D^L.

Para mayor claridad, daremos, en un metalenguaje de MS_D^L, una definición recurrente no formalizada de lo que se entiende por *término sintáctico* de MS_D^L.

1. Una variable de expresión es un término sintáctico de MS_D^L.
2. Toda constante descriptivo-estructural es un término de MS_D^L.
3. Si x e y son términos sintácticos, también lo es '(x⌢y)'.

Presuponiendo el concepto de término puede definirse el de *fórmula* de un modo análogo.

1. Toda constante predicado de grado *n* seguida de *n* variables traducentes es una fórmula de MS_D^L. ($1 \leqq n \leqq 5$·)
2. Si x e y son términos sintácticos, entonces 'x = y' es una fórmula.
3. Si x e y son variables traducentes, entonces 'x = y' es una fórmula.

4. Si **A** es una fórmula y **x** e **y** son variables traducentes, entonces '**y∃Ax**' es una fórmula.

5. Si **A** es una fórmula, **x** es un término sintáctico e **y** es una variable de expresión, entonces '**y∃Ax**' es una fórmula.

6. Si **x** es un término sintáctico e **y** es una variable traducente, entonces '**x Den y**' es una fórmula.

7. Si **A** y **B** son fórmulas, también lo son '**~A**' y '**(A v B)**'.

8. Si **A** es una fórmula, y **x** es, o bien una variable de expresión o bien una variable traducente, entonces '**(x) A**' es una fórmula.

(Estas dos definiciones deben considerarse exhaustivas en el sentido de que nada que no esté estipulado en ellas como tal debe considerarse término o fórmula de MS_D^L; ahora bien, esta misma observación no debe ser añadida simplemente, como otra cláusula más, a las definiciones, sino que su contenido debe ser demostrable en un metalenguaje adecuado de MS_D^L.)

Como hemos de estar escribiendo constantemente expresiones simbólicas en MS_D^L, y no sólo *acerca de* MS_D^L, será conveniente introducir un número de variables traducentes mayor del que en rigor podríamos permitir. Las únicas variables traducentes de que disponemos son '*x*' y '*x*' seguidas de uno o varios acentos. Utilicemos las expresiones '*y*', '*z*', '*w*' y '*u*', posiblemente con acentos, como variables traducentes adicionales. Esto facilitará la escritura, pues en caso contrario nos encontraríamos con sartas de acentos excesivamente largas.

Ya hemos observado que los dos dominios fundamentales de objetos de MS_D^L, el de las expresiones de *L* y el de los objetos de *L*, pueden considerarse mutuamente excluyentes, pues pensamos que este requisito contribuye a la claridad y a la explicitud del estudio de MS_D^L, y que se trata de algo natural: los objetos fundamentales de la mayoría de los lenguajes objeto *L*, del tipo que hallamos en las ciencias, tienen un carácter netamente distinto del de las expresiones lingüísticas de *L*. Si hacemos, pues, que los dos dominios de MS_D^L sean mutuamente excluyentes, parece adecuado utilizar dos tipos de variables. (Obsérvese que expresiones tales como '*a* Den *b*', '*x* Den *x*'' y '*x* Den *a*' carecen de sentido, igual que expresiones como 'P*a*' '($x \frown pd$', 'P'*ax*', etc.: semejantes expresiones sin sentido resultarían de entender los objetos de *L* igual que las expresiones de *L*.) No obstante, el requisito de que los dos dominios se excluyan mutuamente no es en absoluto esencial y, para un método semántico general, podría considerarse algo artificial. En lo que concierne a nuestro estudio, nada se ganará ni perderá por emplear uno u otro método y podremos entender MS_D^L de acuerdo o no con esta exigencia, según lo creamos conveniente: aquéllos a quienes interesan fundamentalmente los lenguajes formalizados para campos científicos concretos apoyarán quizá esta condición; pero si se busca, en cambio, un lenguaje objeto muy amplio y comprensivo, en el que pueda expresarse la totalidad de la ciencia o formularse un sistema epistemológico o metafísico completo, se hallará, sin duda, que nos limita demasiado.

C. Algunas definiciones

Puesto que los elementos primitivos de MS_D^L comprenden a los de M, podemos presuponer como definiciones de MS_D^L las definiciones de M dadas en el capítulo III: la teoría elemental del encadenamiento allí desarrollada nos proporciona, pues, la base sintáctica de MS_D^L. Podemos definir (ahora que disponemos de 'Den') varias nociones de tipo semántico, muchas de las cuales tienen notable interés intrínseco; algunas serán especialmente útiles en lo sucesivo y otras nos permitirán definir de un modo preciso conceptos muy antiguos.

Diremos que una expresión a de L comprende a una expresión b de L, si y sólo si ambas son constantes predicativas y a denota todos y cada uno de los objetos que denota b.

'a Cmpr b' abrevia '(ConsPred a . ConsPred b . $(x)(b\,\mathrm{Den}\,x\,.\supset.\,a\,\mathrm{Den}\,x)$' [1].

Llamaremos *subsunción* semántica a la relación inversa de la comprensión

'a Sub b' abrevia 'b Compr a'.

Evidentemente, una expresión a que a la vez comprende una expresión b y está subsumida en ella es semánticamente *coextensa* con b.

'a CoExt b' abrevia '(a Compr b . a Sub b)'.

Supongamos por un momento que L contenga las constantes predicado 'animal' y 'hombre'; puede decirse entonces que 'animal' comprende 'hombre' y que hombre está subsumido en 'animal'; y si L contiene también 'racional', entonces 'hombre' y 'animal racional' son verosímilmente coextensos. El uso de 'coextenso' para esta relación de comprensión mutua parece acorde, de un modo aproximado, con el uso tradicional de este término.

Los únicos tipos de expresiones de L que consideraremos denotadoras son la(s) constante(s) predicativa(s) primitiva(s) monádica(s) y los abstractos monádicos que no contengan variables libres. Está claro que las combinaciones de símbolos de L sin sentido, tales como '$((xxvv\sim$' no deben considerarse denotadoras. Tampoco denotan las constantes lógicas ni las proposiciones. Considerar que lo hacen exigiría enriquecer notablemente los modos de expresión de MS_D^L, cuando semejante enriquecimiento no es necesario para nuestros presentes fines; además, realmente las expresiones del tipo de las variables no denotan en absoluto: *abarcan* un campo de objetos, pero no puede decirse que los denoten propiamente (véase (VI, F)). Las constantes predicativas de relación pueden ser consideradas denotadoras, pero no en el sentido simple del que estamos hablando (cf. (X, C)). Y L no contiene constantes individuales como elementos primitivos. No quedan, pues, sino las constantes predicativas monádicas, incluyendo a los abstractos: por tanto, sólo consideraremos denotadoras a estas expresiones. En rigor no es necesario introducir un símbolo para este concepto: decir que a es una expresión

[1] El término 'comprende' fue empleado por Hobbes en 1653 en un sentido esencialmente idéntico al que aquí le damos: véase *Leviathan*, p. 15. Cf. el trabajo del autor «On the Semantics of Hobbes», *Philosophy and Phenomenological Research*, 14 (1954), pp. 205-11.

denotadora equivale simplemente a decir que *a* es una constante predicativa monádica en el sentido definido en (III, F).

Se dice que una constante predicativa de *L* es *común* si y sólo si denota al menos dos objetos distintos.

'Com *a*' abrevia '(ConsPred *a* . (E*x*)(E*y*)(~*x* = *y* . *a* Den *x* . *a* Den *y*))'.

Dentro de *L*, por ejemplo, '*x*з(P*x* . (E*x*')P'*xx*')' es una constante predicativa común, siempre que 'P' se aplique a más de un objeto y que el dominio de la relación P' tenga más de un miembro. Análogamente, '*x*з(P*x* v~ ~ P*x*)' es una constante predicativa común si el campo fundamental de *L* contiene al menos dos entidades distintas.

Una constante predicativa *unitaria* denota sólo un objeto [1].

'Unit *a*' abrevia '(ConsPred *a* . (E*x*)(*a* Den *x* . (*y*) (*a* Den *y* . ⊃ . *x* = *y*)))'.

Si '(E*x*)(P*x* . (*x*')(P*x*' . ⊃ . *x* = *x*'))' se cumple en *L*, entonces '*x*зP*x*' y 'P' son constantes predicativas unitarias.

Debemos tener cuidado en no confundir estas últimas constantes con los nombres propios: un nombre propio se parece a una constante predicativa unitaria en que ambos denotan unívocamente individuos; pero las constantes predicativas unitarias son —naturalmente— constantes predicativas, mientras que los nombres propios son constantes individuales. *L* no contiene como elementos primitivos constantes individuales, ni por tanto nombres propios (véase la teoría de los nombres propios en el capítulo X); éstos pueden introducirse en *L* mediante definición a base de descripciones, como hemos observado anteriormente; pero por el momento no nos interesa hacerlo.

Una constante predicativa de *L* es *nula* cuando no denota ningún objeto.

'Nula *a*' abrevia '(ConsPred *a* . ~(E*x*)*a* Den *x*)'.

Por ejemplo, '*x*з(P*x* . ~P*x*)' es una constante predicativa nula de *L*. Y, como podría esperarse, una constante predicativa de *L* es *universal* cuando denota todos y cada uno de los objetos.

'Univ *a*' abrevia '(ConsPred *a* . (*x*)*a* Den *x*)'.

'*x*з(P*x* v ~P*x*)', por ejemplo, es una constante predicativa universal de *L*.

Definiremos ahora otro importante concepto semántico. Sea '----*x*----' cualquier función proposicional de la variable única *x*, dentro de la parte traducente de MS_D^L. Supongamos que, (i) para todo *x*, una expresión *a* denote *x* si y sólo si ------*x*------, y (ii) *a* sea una constante predicativa. (i) y (ii) nos dan la condición necesaria y suficiente bajo la cual puede decirse que *a se extiende sobre* o *tiene como extensión* la totalidad de los objetos *x* tales que ----*x*----. Supongamos que escribimos '----*x*----' en la forma '*x*з---*x*---*x*', empleando el operador de abstracción. Podemos entonces establer que

'*a* Ext *x*з---*x*---' abrevia '(ConsPred *a* . (*x*) (*a* Den *x* . ≡ . *x*з---*x*---*x*))'.

---

[1] La distinción entre constantes predicativas comunes y unitarias es algo semejante a la que WOODGER establece entre «nombres compartidos» y «nombres no compartidos». Véase su *Biology and Language*, p. 17; véase también su «Science without Properties», *The British Journal for the Philosophy of Science*, II, 7 (1951), pp. 193-216. Cf. HOBBES, *loc. cit.*, y también Ockham, *Summa Logicae*, I, cc. 68-9.

O bien, usando otra notación, que

'*a* Ext **F**' abrevia '(ConsPred *a* . (*x*)(*a* Den *x* . ≡ . **F***x*))',

siendo **F** una constante predicativa primitiva monádica o un abstracto monádico (que no contenga variables libres) dentro de la parte traducente de MS_D^L. Adviértase que expresiones tales como **F** no representan en MS_D^L, en modo alguno, objetos que sean valores para las variables: son simplemente abstractos o constantes predicativas primitivas que proporcionan modos de hablar lingüísticamente convenientes acerca de totalidades de objetos. Estas totalidades no son en rigor clases o propiedades, pues no constituyen valores para variables de clase o de propiedad: son lo que hemos llamado anteriormente *clases virtuales*. Se comportan de un modo muy semejante al de las clases y tienen muchas de las características de éstas; pero no pueden cuantificarse, no es posible decir 'Para todas las clases virtuales, pasa tal y tal cosa' y, por tanto, no pueden considerarse como auténticas clases. La definición que acabamos de dar introduce de hecho una especie de denotación de clases virtuales: no se trata en rigor de denotación, pero sí de algo estrechamente emparentado con ella. Puesto que la definición requiere que *a* sea una constante predicativa, las clases virtuales pueden considerarse como aquello, sea lo que fuere, sobre lo cual los abstractos o las constantes predicativas primitivas monádicos se extienden en el sentido definido. Pero, en rigor, las clases virtuales no existen y, por tanto, es harto sutil hablar de ellas.

Otra importante relación semántica es la de *satisfacción*, en el sentido restringido en que se dice que un objeto *x* *satisface* una función proposicional de (a lo sumo) una variable. Esto es definible así:

'*x* Sat *a*' abrevia '(E*b*)(FuncPropUna *a*, *b* . (*b*⌢*epinv*⌢*a*) Den *x*)'.

Un objeto *x* satisface *a* si y sólo si *a* es una función proposicional de cierta variable *b* en que el abstracto (*b*⌢*epinv*⌢*a*) denota *x* [1]. Si 'Sat' en este sentido fuese el elemento primitivo semántico en lugar de 'Den', 'Den' sería definible del modo siguiente.

'*a* Den *x*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(FuncPropUna *b*,*c* . *a* = (*c*⌢*epinv*⌢*b*) . *x* Sat *b*)'.

En el capítulo VII esbozaremos una semántica basada en la satisfacción. En MS_D^L el papel de la satisfacción está enteramente usurpado por la denotación múltiple.

Introduciremos, finalmente, tres importantes relaciones semánticas emparentadas con los conceptos de *suma*, *producto* y *negación lógicos*.

Supongamos que *L* contiene las constantes predicativas 'macho' y 'hembra' y que queremos hablar de la constante predicativa compleja 'macho o hembra'. Llamaremos *suma semántica* de las dos constantes predicativas que incluye, a semejante constante predicativa compleja (la analogía con la suma lógica de la lógica de funciones veritativas basta para justificar la terminología empleada); más exactamente, puede decirse que una expresión *a* es la suma semántica de expresiones *b* y *c* siempre que *a*, *b* y *c* sean constantes predicativas y que, para todo *x*, *a* denote *x* si y sólo si *b* denota *x* o *c* denota *x*.

[1] Esta relación de satisfacción es mucho más sencilla que las estudiadas por TARSKI en *Der Wahrheitsbegriff*, en la página 311 y en todo el resto.

'*a* Sum *b*,*c*' abrevia '(ConsPred. *a* . ConsPred *b* . ConsPred. *c* . (*x*) (*a* Den *x* :≡: *b* Den *x* .v. *c* Den *x*))'.
Dentro de *L*, por dar otro ejemplo, '*x*∃(P*x* v (E*x*′)P′*xx*′)' es una suma semántica de 'P' y '*x*∃(E*x*′)P′*xx*′', porque estas tres expresiones son constantes predicativas y la primera denota precisamente los objetos denotados por la segunda y la tercera.

De un modo parecido puede introducirse el concepto de *producto semántico*: el producto de dos constantes predicativas ha de denotar precisamente los objetos denotados por ambas.

'*a* Prod *b*,*c*' abrevia '(ConsPred *a* . ConsPred *b* . ConsPred *c* . (*x*) (*a* Den *x* :≡: *b* Den *x* . *c* Den *x*))'.
Por ejemplo, en *L*, '*x*∃(P*x* . (E*x*′)P′*xx*′)' es un producto semántico de '*x*∃P*x*' y '*x*∃(E*x*′)P′*xx*′'.

Finalmente, dada cualquier constante predicativa, queremos poder formar su *negación semántica*: ésta ha de denotar precisamente aquellos objetos que no denote la otra.

'*a* Neg *b*' abrevia '(ConsPred *a* . ConsPred *b* . (*x*) (*a* Den *x* .≡. ~*b* Den *x*))'.
Por ejemplo, en *L*, '*x*∃P*x*' y '*x*∃~P*x*' son, sin duda alguna, negaciones la una de la otra. Una constante predicativa y su negación semántica tienen denotados mutuamente excluyentes, pero juntas son exhaustivas en el sentido de que su suma semántica denota todo.

En obras sobre la semántica tradicional se han tratado de vez en cuando ciertos conceptos relacionados con los de suma, producto y negación semánticos; sin embargo, han quedado siempre algo vagos, y apenas se han hecho intentos de proporcionarles una estructura semática precisa.

D. Reglas semánticas

Consideremos ahora la estructura axiomática de MS_D^L. Habrá cuatro tipos de axiomas, correspondientes a las cuatro partes que hemos distinguido anteriormente en el metalenguaje semántico: comprenderán, (1) axiomas lógicos, (2) axiomas no lógicos o traducentes, (3) axiomas sintácticos y, finalmente, (4) algunos axiomas semánticos.

Los *Axiomas lógicos* referentes a las funciones veritativas vienen dados por *R1*-*R4*, de (II, A), donde las letras 'A', etc., representan cualquier fórmula de MS_D^L. La Regla de cuantificación *R5* debe, sin embargo, expresarse así:

R5′. ⊢ (x)A ⊃ B, siendo x una variable de expresión e y un término sintáctico, o siendo x e y variables traducentes, y (etc., como en *R5* para A y B).

En R*6*, 'A' y 'B' han de representar cualquier fórmula y 'x' cualquier variable traducente o de expresión de MS_D^L. Análogamente, *MP* y *Gen* se transforman en reglas de MS_D^L si entendemos que 'A' y 'B' representan fórmulas cualesquiera de MS_D^L y 'x' cualquier variable traducente o de expresión. La regla que proporciona los *Axiomas de abstracción* debe llevar la condición de que, o bien (i) x e y sean varia-

bles traducentes, o bien (ii) **x** sea un término sintáctico e **y** una variable de expresión, y no sea libre en y (etc., lo que se requiere para **A** y **B**). Las reglas de identidad *R7* y *R8* se hacen también reglas de MS_D^L si se toman sus variables como términos sintácticos o como variables traducentes de MS_D^L. En lo sucesivo nos referiremos a estas reglas lógicas de MS_D^L como *R1'-R8'*, *MP'*, *Gen'* y *Abst'*.

Los *Axiomas traducentes* de MS_D^L comprenden las traducciones de los axiomas no lógicos de *L;* serán generalmente axiomas adecuados a la disciplina particular formalizada por *L*. Los *Axiomas sintácticos* de MS_D^L comprenden precisamente los de *M* estipulados por *RSin1-RSin4* (II, B).

Debido a la presencia de 'Den' en *MSn* hemos de tener además algunas *Reglas de denotación* o *Reglas semánticas* [1].

Debemos asegurar de algún modo que en MS_D^L los abstractos tales como '$x\ni$---x---' se extiendan sobre las correspondientes clases virtuales. Por ello querríamos que se cumpliese

(1) '$(x)(a$ Den x . $\equiv$. ---x---)'

donde en lugar de *a* pondríamos la descripción estructural del abstracto '$x\ni$---x---', siendo '---x---' cualquier función proposicional de la variable única 'x' dentro de la parte traducente de MS_D^L. El modo más sencillo de asegurar que todas las expresiones del tipo de (1) se den en MS_D^L es asumir esto por medio de una regla. Por ello, la primera *Regla de donotación*, que estipula una infinidad de axiomas en MS_D^L, es la siguiente:

RDen1. $\vdash$ (**x**) (*a* Den **x** . $\equiv$. ---**x**---), en donde, (i) '---x---' es cualquier función proposicional de la variable única **x** en la parte traducente de MS_D^L, y en lugar de '*a*' ponemos la descripción estructural del abstracto '$\mathbf{x}\ni$---**x**---', o bien (ii) en lugar de '*a*' ponemos '*pe*' y '---**x**---' es la función proposicional 'P**x**'.

(La segunda cláusula es necesaria porque 'P' es la única constante predicado monádica de *L*.) Según esta regla, por ejemplo,

$\vdash$ $(x)((qis \frown epinv \frown pi \frown pe \frown qis \frown uve \frown tilde \frown pe \frown qis \frown pd)$ Den x . $\equiv$. (Px v $\sim$Px)).

El único axioma adicional necesario está estipulado por una *Regla restrictiva*, que establece que, si una expresión *a* de *L* denota cualquier *x*, *a* es una constante predicativa.

RDen2. $\vdash$ *a* Den x . $\supset$. ConsPred *a* .

Naturalmente, la fórmula inversa de la estipulada por *RDen2* no es válida, porque las constantes predicativas nulas no denotan ningún objeto. Sabríamos, gracias a las anteriores definiciones de 'Com', 'Unit', 'Univ' y 'Nula' (en el § C), que las expresiones sin sentido —como 'vv $\sim x$'— no son constantes predicativas comunes, unitarias, universales ni nulas; pero, sin postular *RDen2* o algún axioma equivalente, no sabríamos que no denotan en absoluto.

Resumiendo: la lista de reglas de MS_D^L comprende *R1'-R8'*, *MP'*, *Gen'*, *Abst'*, *las traducciones de los axiomas no lógicos de L*, *RSin1-RSin4* y *RDen1-RDen2*.

[1] Cf. TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 305-6, condiciones (α) y (β).

E. Algunos teoremas elementales

Apuntemos ahora algunas consecuencias elementales de los axiomas y reglas de MS_D^L. Los teoremas puramente lógicos ya han sido demostrados en el capítulo II, y la parte sintáctica de MS_D^L se ha estudiado detalladamente en el capítulo III. Por tanto, aquí nos ocuparemos exclusivamente de los teoremas semánticos, es decir, los que dependen de 'Den' de un modo esencial o los que dependen de *RDen1* o de *RDen2*.

El primer teorema establece que cierta constante predicado denota todos los objetos de *L*.

TE1a. $\vdash$ (x) $(qis \frown epinv \frown pi \frown pe \frown qis \frown uve \frown tilde \frown pe \frown qis \frown pd)$ Den x.

Se demuestra por *RDen1*, que establece, en particular, que

$$\vdash (x)\ ((qis \frown epinv \frown . \ . \ . \frown pd)\ \text{Den}\ x\ .\equiv.\ (Px \vee \sim Px)).$$

Luego también

TE1b. $\vdash$ $(\text{E}a)(x)a$ Den x.

De un modo análogo se demuestra que

TE1c. $\vdash$ $\sim(\text{E}x)$ $(qis \frown epinv \frown tilde \frown pi \frown pe \frown qis \frown uve \frown tilde \frown pe \frown quis \frown pe)$ Den x.

Y, por tanto, también que

TE1d. $\vdash$ $(\text{E}a)$ $(x)\sim a$ Den x.

Recordemos que *TG9g*(III) establece que (tomando el abstracto de *TE1c*)

$$\vdash \text{ConsPred}\ (qis \frown epinv \frown tilde \frown . \ . \ . \frown pd).$$

Luego también tenemos que

TE1e. $\vdash$ $(\text{E}a)$ (ConsPred a . $(x)\sim a$ Den x).

El teorema siguiente, que será de utilidad frecuentemente, es un corolario de *RDen1*.

TE2. $\vdash$ (y) (a Den y . $\equiv$. A), siendo 'a' la descripción estructural de un abstracto 'x_3---x---' (de la parte traducente del metalenguaje) que no contenga variables libres, y una variable distinta de x (y que no aparezca en '---x---') y en donde A difiera de '---x---' sólo en contener y allí (y sólo allí) donde haya apariciones libres de x en '---x---'.

La demostración es inmediata, mediante *RDen1* y una ley de cuantificación.

El siguiente teorema (o, mejor, lema) es una ley de *unicidad* referente a las constantes predicativas unitarias.

TE3. $\vdash$ Unit a . a Den x . a Den y :$\supset$: $x = y$.

Esto queda inmediatamente demostrado si se observa que

$\vdash$ $(\text{E}x)$ (a Den x . (y) (a Den y . $\supset$. $x = y$)) . a Den z . a Den w :$\supset$: $z = w$.

El próximo teorema es la negación de un principio de unicidad, partiendo de la hipótesis de que el dominio fundamental de *L* contenga al menos dos objetos distintos.

TE4. $\vdash$ $(\text{E}x)$ $(\text{E}y)\sim x = y$. $\supset$. $\sim(a)$ (x) (y) (a Den x . a Den y :$\supset$: $x = y$).

Por *TE1a*,

$\vdash$ $(\text{E}x)$ $(\text{E}y)\sim x = y$. $\supset$. $(\text{E}x)$ $(\text{E}y)$ $((qis \frown epinv \frown . \ . \ . \frown pd)$ Den x . $(qis \frown epinv \frown . \ . \ . \frown pd)$ Den y . $\sim x = y$).

Después se obtiene *TE4* usando varias leyes de cuantificación.

Quizá se quiera poder prescindir de la hipótesis citada para demos-

trar la negación del principio de unicidad, pues no es posible demostrar tal hipótesis por separado más que apelando a los axiomas no lógicos de *L:* por regla general, estos axiomas nos permitirían demostrarla rápidamente. Sin embargo, en vez de admitir que lo hacen, preferimos tomar '(Ex) (Ey) $\sim x = y$' como hipótesis siempre que sea necesario. Igualmente, para otros teoremas que hemos de dar, añadiremos cuando haga falta una hipótesis adecuada en vez de suponer que son consecuencia de los axiomas no lógicos de *L*.

Los siguientes teoremas son principios de identidad.

TE5a. $\vdash x = y \,.\supset.\, (a)\ (a \text{ Den } x \,.\equiv.\, a \text{ Den } y)$.

Esto es una consecuencia inmediata de *R8'*. La inversa es también válida, mediante una hipótesis adecuada:

TE5b. $\vdash (\text{E}a)\ (\text{Unit } a \,.\, a \text{ Den } x) :\supset: (a)\ (a \text{ Den } x \,.\equiv.\, a \text{ Den } y) \,.\supset.\, x = y$.

TE5c. $\vdash a = b \,.\supset.\, (x)\ (a \text{ Den } x \,.\equiv.\, b \text{ Den } x)$.

Este último teorema se sigue también directamente de *R8'*, pero la inversa es indemostrable.

TE6. $\vdash$ ConsPred a . ConsPred $b :\supset: a$ CoExt $b \,.\equiv.\, (x)\ (a \text{ Den } x \,.\equiv.\, b \text{ Den } x)$.

La demostración es inmediata, utilizando la definición de 'CoExt'.

Es evidente que la relación de comprensión es *transitiva y reflexiva* si se limita a las constantes predicativas,

TE7. $\vdash a$ Cmpr $b \,.\, b$ Cmpr $c :\supset: a$ Cmpr c.

TE7b. $\vdash$ ConsPred $a \,.\supset.\, a$ Cmpr a.

Las demostraciones son inmediatas. Luego también,

TE7c. $\vdash$ ConsPred a . ConsPred $b :\supset: a$ Cmpr $b \,.\equiv.\, (c)$ (ConsPred c . b Cmpr $c :\supset: a$ Cmpr c).

Lo cual se demuestra por *TE7a* y *TE7b*.

Ya hemos indicado una importante ley referente a la coextensividad, *TE6;* tenemos además las siguientes leyes de la coextensividad:

TE8a. $\vdash$ ConsPred $a \,.\supset.\, a$ CoExt a.

TE8b. $\vdash a$ CoExt $b \,.\equiv.\, b$ CoExt a.

TE8c. $\vdash a$ CoExt $b \,.\, b$ CoExt $c :\supset: a$ CoExt c.

TE8d. $\vdash$ ConsPred $a :\supset: a$ CoExt $b \,.\equiv.\, (c)(c\text{CoExt } a \,.\equiv.\, c$ CoExt $b)$.

La ley siguiente es un tipo de ley de unicidad referente a la extensión de las expresiones para clases virtuales: establece que si a y b se extienden sobre la misma clase virtual, entonces a y b son coextensas.

TE9a. $\vdash a$ Ext $\mathbf{F} \,.\, b$ Ext $\mathbf{F} :\supset: a$ CoExt b.

La demostración es inmediata a partir de la definición de 'Ext' mediante *TE6*. Tenemos también que

TE9b. $\vdash a$ Ext $\mathbf{F} \,.\, a$ Ext $\mathbf{G} :\supset: (x)\ (\mathbf{F}x \,.\equiv.\, \mathbf{G}x)$,

TE9c. $\vdash a$ Ext $\mathbf{F} \,.\, a$ CoExt $b :\supset: b$ Ext $\mathbf{F}$,

y

TE9d. $\vdash$ ConsPred $a :\supset: a$ Ext $\mathbf{F} \,.\equiv.\, (b)\ (b$ CoExt $a \,.\supset.\, b$ Ext $\mathbf{F})$.

Obsérvese que las únicas expresiones que se extienden sobre clases virtuales son, por definición, constantes predicativas. No solamente tenemos que

TE10a. $\vdash a$ Ext $\mathbf{F} \,.\supset.$ ConsPred a,

sino también, mediante *RDen2*, que

TE10b. ⊢ *a* Den *x* .v. *a* Ext **F** :⊃: ConsPred *a*.

La siguiente es otra ley de coextensividad.

TE11. ⊢ ConsPred *a* . Vbl *b* :⊃: *a* CoExt (*b*∩*epinv*∩*a*∩*b*).

La demostración se basa en *Abst'*, *RDen1*, *RSin4* y *TE6*.

Finalmente, indicamos los siguientes teoremas acerca de *uve* y *tilde*.

TE12. ⊢ FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* :⊃: (*x*)((*c*∩*epinv*∩(*a uve b*)) Den *x* .≡. ((*c*∩*epinv*∩*a*) Den *x* .v. (*c*∩*epinv*∩*b*) Den *x*)).

TE13. FuncPropUna *a,b* .⊃. (*x*)((*b*∩*epinv*∩*a*) Den *x* .≡. ∼(*b*∩*epinv*∩*tilde a*) Den *x*).

Las demostraciones están fundadas en *RDen1* y *RSin4*.

F. Algebra booleana de constantes predicativas

Veamos ahora algunas propiedades más de las sumas, productos y negaciones semánticas, antes de introducir en el capítulo próximo el concepto semántico de verdad. En particular, se observará que la teoría de las constantes predicativas forma un *álgebra booleana* dentro de MS^L_D, si tomamos la relación booleana de inclusión como subsunción semántica, la identidad booleana como coextensividad, la adición, la multiplicación y la negación booleanas como, respectivamente, suma, producto y negación semánticas y los elementos nulo y universal de Boole, respectivamente, como constantes predicativas universal y nula. Tenemos así en MS^L_D los teoremas siguientes [1].

TF1. ⊢ ConsPred *a* .⊃. *a* Sub *a*.

TF2. ⊢ *a* Sub *b* . *b* Sub *c* :⊃: *a* Sub *c*.

TF3. ⊢ *a* CoExt *b* .≡. (*a* Sub *b* . *b* Sub *a*).

TF4. ⊢ ConsPred *b* . ConsPred *c* .⊃: (E*a*) (*a* Sum *b,c* . (*d*) (*d* Sum *b,c* .⊃. *d* CoExt *a*)).

TF5. ⊢ *a* Sum *b,c* :⊃: Sub *a* . *c* Sub *a*.

TF6. ⊢ *d* Sum *a,b* .⊃. (*c*) (*a* Sub *c* . *b* Sub *c* :⊃: *d* Sub *c*).

TF7. ⊢ ConsPred *b* . ConsPred *c* :⊃: (E*a*) (*a* Prod *b,c* . (*d*) (*d* Prod *b,c* .⊃. *d* CoExt *a*)).

TF8. ⊢ *a* Prod. *b,c* :⊃: *a* Sub *b* . *a* Sub *c*.

TF9. ⊢ *d* Prod *a,b* .⊃. (*c*) (*c* Sub *a* . *c* Sub *b* :⊃: *c* Sub *d*).

TF10. ⊢ *a'* Prod *a,b* . *b'* Prod *a.c* . *e'* Sum *a',b'* . *d* Sum *b,c* . *e* Prod *a,d* :⊃: *e* CoExt *e'*.

TF11. ⊢ *a'* Sum *a,b* . *b'* Sum *a,c* . *e'* Prod *a',b'* . *d* Prod *b,c* . *e* Sum *a,d* :⊃: *e* CoExt *e'*.

TF12. ⊢ (E*a*) (Univ *a* . (*b*) (Univ *b* .⊃. *b* CoExt *a*)).

TF13. ⊢ (E*a*) (Nula *a* . (*b*) (Nula *b* .⊃. *b* CoExt *a*)).

TF14. ⊢ ConsPred *a* .⊃. (E*b*) (*b* Neg *a* . (*c*) (*c* Neg *a* .⊃. *c* Co Ext *a*)).

---

[1] Cf. Tarski, «Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I», *Fundamenta Mathematicae*, 24 (1935), pp. 177-98, especialmente página 178. Cf., p. ej., el todavía útil L. Couturat, *The Algebra of Logic* (Open Court Publishing Co., Chicago y Londres, 1914) y G. Birkhoff y S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra* (Macmillan, New York, 1941).

TF15. ⊢ *a* Neg *b* . *c* Prod *a,b* :⊃: Nula *c*.
TF16. ⊢ *a* Neg *b* . *c* Sum *a,b* :⊃: Univ *c*.

Podría pensarse que se requieren hipótesis suplementarias para enunciar estas leyes, a fin de que las expresiones (de *L*) a que se refieren sean constantes predicativas. Pero no son necesarias gracias a la ley siguiente, según la cual los elementos relacionados por sumas, productos y negaciones semánticas son constantes predicadtivas:

TF17. ⊢ *a* Sum *b,c* .v. *a* Prod *b,c* .v. (*a* Neg *b* . ConsPred *c*) :⊃: ConsPred *a* . ConsPred *b* . ConsPred *c*.

Podemos presuponer demostrado a partir de *TF1-TF7* cualquier teorema booleano ulterior que sea necesario.

El significado del álgebra booleana de constantes predicativas se hará patente cuando estudiemos (en los capítulos VIII-IX) un tipo diferente de semántica, en la cual esta teoría desempeñará un papel importante. Algunos de estos teoremas, así como algunas de sus consecuencias ulteriores, serán también útiles en los capítulos V-VII.

CAPÍTULO V

Verdad, adecuación y coherencia

Este capítulo trata principalmente del concepto de verdad, uno de los más importantes de la semántica. En el § A y en el § B se darán, dentro de MS_D^L, *varias definiciones posibles* de lo que se entiende por verdadero en un lenguaje objeto dado L. En el § C se demostrará de dos modos diferentes que las definiciones de verdad son *adecuadas* en cierto sentido. Comentaremos en el § D, sin emplear la formalización, el significado de las demostraciones de adecuación. La importante relación existente entre el concepto semántico de verdad y el de *coherencia* se indica en el § E. En el § F se introducen algunos *conceptos ulteriores* de semántica. En el § G se da una demostración de la coherencia relativa de MS_D^L; se hace ver allí que los axiomas de MS_D^L son coherentes bajo un supuesto adecuado. En el § H se discuten varios tipos de *autorreferencia*, y se muestra que MS_D^L no puede interpretarse de forma que contenga su propia semántica. Finalmente, en el § I se indica someramente la importante relación existente entre el concepto de verdad y el de *indecidibilidad*. El contenido de los parágrafos H e I es algo más difícil que el de los precedentes desde un punto de vista matemático y, si se quiere, puede pasarse por alto: sólo de vez en cuando se hacen referencias a ello en lo sucesivo.

A. Verdad

Recordemos que una proposición universal atómica de L es una proposición de la forma '(x)---x---', donde '---x---' es una función proposicional de la variable única 'x'. Las proposiciones universales de L son proposiciones que formamos mediante un número finito de aplicaciones de la disyunción y la negación a partir de proposiciones atómicas universales. Es conveniente dividir la primera definición de verdad en dos partes, que se aplican, respectivamente, la primera a las proposiciones universales atómicas y la segunda a las proposiciones no atómicas.

¿En qué circunstancias podemos decir, a partir de la denotación, que una proposición universal atómica '(x)---x---' es *verdadera*? Parecería esencial cierta referencia a *todo* objeto, así como sólo a aquellos objetos x tales que ---x---: para la definición necesitaríamos una expre-

sión *c* que denotase todos los objetos de *L* y una expresión *b* que denotase sólo aquellos objetos *x* tales que ---*x*---. Pero, ¿cómo se han de relacionar entre sí *c* y *b*? Supongamos que se requiere que *b* comprenda a *c*: puesto que *c* es universal, *b* lo es también (IV, F); luego podemos decir que '(*x*)---*x*---' es verdadera en *L* si y sólo si '*x*3---*x*---' es una constante predicativa universal de *L*.

La siguiente abreviatura es conveniente para enunciar con precisión tal definición de verdad:

'*c* S_{pd}^{epinv} *d*' abrevia '(E*a*) (E*b*) (FuncPropUna *a*,*b* . *c* = (*b*⌢*epinv*⌢*a*) . *d* = (*b cu a*))'.

'*c* S_{pd}^{epinv} *d*' se cumple sólo cuando *c* es un abstracto y *d* la correspondiente proposición atómica universal (la 'S' de esta abreviatura está encaminada a sugerir 'substitución', palabra que parece adecuada, pues formamos *c* a partir de *d* suprimiendo el primer paréntesis izquierdo de *d* y substituyendo el primer *pd* por la izquierda de *d* por *epinv*).

Podemos, pues, decir que una proposición universal atómica *a* es verdadera en *L* si y sólo si existe un abstracto *b* que sustente la relación S_{pd}^{epinv} con *a* y que sea universal.

(I) 'Vrd$_1$ *a*' abrevia '(PropUnivAt *a* . (E*b*) (Univ *b* . *b* S_{pd}^{epinv} *a*))'.

(El subíndice '1' sirve simplemente para indicar que éste es el primer predicado de verdad, al cual va a seguir un segundo.)

Definimos ahora el concepto de verdad aplicado a las proposiciones universales *no* atómicas de *L*. Recordemos de (II, G) que cualquier proposición universal puede llevarse a una forma normal conyuntiva equivalente. Toda forma normal conyuntiva es una conyunción de disyunciones, siendo cada componente mínimo de cada disyunción un constituyente atómico o la negación de uno. ¿En qué circunstancias querríamos decir que una proposición universal (no atómica) es verdadera? En lugar de considerar la proposición misma consideremos una forma normal conyuntiva suya: ésta será una conyunción de disyunciones y, por tanto, será verdadera sólo cuando todos los miembros de la conyunción (o miembros conyuntivos) sean verdaderos; pero cada miembro conyuntivo mínimo es a su vez una disyunción, y por ello será verdadero sólo cuando al menos uno de los miembros disyuntivos mínimos sea verdadero; y cada miembro disyuntivo mínimo es, o bien una proposición universal atómica o bien la negación de una. Por tanto, podemos decir que una proposición atómica no universal *c* es verdadera si y sólo si existe una proposición *a* que es una forma normal conyuntiva de *c*, y si para todos los miembros conyuntivos mínimos *b* de *a*, o bien existe una proposición universal atómica *d* como miembro disyuntivo mínimo de *b*, y *d* es verdadera (en el sentido de 'Vrd$_1$'), o bien existe un *e* tal que *e* es la negación de una proposición universal atómica *d*, siendo *e* un miembro disyuntivo mínimo de *b* y *d* no es verdadera (en el sentido de 'Vrd$_1$'). Este enunciado puede tomarse como una definición tosca; a fin de hacerla precisa, necesitamos algunas definiciones más de tipo sintáctico.

Primero necesitamos una definición formal del concepto de *forma normal conyuntiva*. Hemos tratado este concepto de un modo no formalizado en (II, G), limitándonos a las proposiciones universales; conserva-

remos aquí esta limitación, pues son éstas las únicas clases de proposiciones para las cuales necesitamos una forma normal conyuntiva.

Se dirá que una expresión *a* es una *disyunción* de proposiciones atómicas universales o de sus negaciones si y sólo si está construida (a partir de proposiciones atómicas universales o de sus negaciones) íntegramente por medio de 'v'. Podemos definir tal cosa por medio de ingredientes enmarcados:

'Disy *a*' abrevia '(E*b*) (*a* IngEnm *b* . (*c*) (*c* IngEnm *b* :⊃: PropUnivAt *c* .v. (E*d*) (PropUnivAt *d* . *c* = (*tilde d*)) .v. (E*d*) (E*c*) (*d*Ant$_s$ *c* . *e* Ant$_s$ *c* . *c* = (*d uve e*))))'.

Se dirá que una expresión *a* es un *miembro disyuntivo mínimo* de *b* siempre que *b* sea una disyunción de proposiciones universales atómicas o sus negaciones, *a* sea una proposición atómica universal o la negación de una y *a* sea un segmento de *b*.

'*a* DisyMin *b*' abrevia '(Disy *b* . (PropUnivAt *a* .v. (E*c*) (PropUnivAt *c* . *a* = (*tilde c*))) . *a* Seg *b*)'.

Se dirá que una expresión *a* es una *conyunción* (de cierto tipo) siempre que sea un ingrediente enmarcado de una expresión *b*, cada ingrediente enmarcado de la cual, o bien sea una disyunción de proposiciones universales atómicas o sus negaciones, o bien esté construido a partir de ingredientes anteriores por medio de la conyunción.

'Cony *a*' abrevia '(E*b*) (*a* IngEnm *b* . (*c*) (*c* IngEnm *b* :⊃: Disy *c* .v. (E*d*) (E*e*) (*d* Ant$_s$ *c* . *e* Ant$_s$ *c* . *c* = (*d punto e*))))'.

Se dirá que una expresión *a* es un *miembro conyuntivo mínimo* de *b* si y sólo si *b* es una conyunción (en el sentido definido), *a* es una disyunción (de proposiciones universales atómicas o sus negaciones) y *a* es un segmento de *b* pero no es un segmento de otra disyunción que no sea ella misma.

'*a* ConyMin *b*' abrevia '(Cony *b* . Disy *a* . *a* Seg *b* . ~(E*c*) (Disy *c* . ~*c* = *a* . *a* Seg *c*))'.

Teniendo estos conceptos presentes podemos definir el de forma normal conyuntiva, en el sentido que necesitamos para definir la verdad para las proposiciones universales. Una expresión *a* es una *forma normal conyuntiva (especial)* de *b*, si, (i) *a* es una conyunción en el sentido definido, (ii) para toda proposición universal atómica *c*, si *c* es un segmento de *a* entonces *c* es un segmento de *b* y viceversa y (iii) (*a triguión b*) es un teorema lógico. Luego

'*a* FNC *b*' puede abreviar '(Cony *a* . (*c*) (PropUnivAt *c* :⊃: *c* Seg *a* . ≡ . *c* Seg *b*) . TeorLog (*a triguión b*))'.

Hemos puesto como condición que *a* esté construida a partir de proposiciones universales atómicas de *b* (o de negaciones de éstas). (También se podría exigir que cada proposición universal atómica de *b* o su negación reaparezca como miembro disyuntivo mínimo de *cada* miembro conyuntivo mínimo de *a*; pero ello no es esencial.)

Podemos ahora dar la definición precisa de verdad aplicada a las proposiciones universales no atómicas de *L* (definición que hemos dado antes sin formalizar).

(II) 'Vrd$_2$ *a*' abrevia '(PropUniv *a* . ~PropUnivAt *a* . (E*b*) (*b* FNC *a*

. (*c*) (*c* ConyMin *b* :⊃: (E*d*) (PropUnivAt *d* . *d* DisyMin *c* . Vrd_1 *d*) .v. (E*d*) (E*e*) (PropUnivAt *d* . *e* DisyMin *c* . *e* = (*tilde d*) . ~Vrd_1 *d*))))'.

Las definiciones (I) y (II) constituyen juntas una definición general de la verdad para todas las proposiciones de *L*. Podemos, pues, establecer que

'Vrd *a*' abrevia '(Vrd_1 *a* .v. Vrd_2 *a*)'.

Cada proposición de *L* es, o bien una proposición universal atómica o bien una proposición universal no atómica, y, por tanto, si es verdadera, es verdadera en el sentido de 'Vrd_1' o en el de 'Vrd_2'.

B. Otras definiciones posibles

Veamos ahora varias definiciones de verdad distintas de la anterior.

Obtendremos la primera de ellas reflexionando sobre el teorema de la forma normal prenexuada. Recordemos que las proposiciones en forma normal prenexuada son de la forma

'(Qx_1) . . . (Qx_n) **A**',

donde $x_1, \ldots, x_n$ son variables distintas que aparecen en **A**, **A** no contiene cuantificadores ni otras variables libres que $x_1, \ldots, x_n$, y cada '(Qx_i)' es, o bien '(x_i)' o bien '(E x_i)'. El teorema de la forma normal prenexuada establece que, dada cualquier proposición **B** de *L*, existe al menos una proposición **C** en forma normal prenexuada tal que ⊢ **C** ≡ **B**. Podemos también pedir, sin pérdida de generalidad, que **C** comience con un cuantificador universal, como ya hemos indicado en (II, G): **C** será, por tanto, una proposición universal atómica. Estas observaciones sugieren otra definición de verdad que utilice formas normales prenexuadas en vez de formas normales conyuntivas: una proposición *a* de *L* será, pues, verdadera si y sólo si existe una proposición *b* tal que *b* sea una forma normal prenexuada de *a* y sea verdadera en el sentido de (I).

Para precisar esta definición podemos suponer definido el concepto de forma normal prenexuada: 'a FNP *b*' expresará que *a* es una forma normal prenexuada de *b* que comienza con un cuantificador universal. Ahora podemos definir la verdad así:

(III) 'Vrd *a*' abrevia '(Prop *a* . (E*b*) (E*c*) (*b* FNP *a* . Univ *c* . *c* $S_{pd}^{ep\,inv}$ *b*))'.

Adviértase que esta definición no es sólo otra manera de indicar (I): puede decirse más bien que incluye las dos definiciones anteriores, (I) y (II).

Más sencilla es la siguiente definición de la verdad:

(IV) 'Vrd *a*' abrevia '(Prop *a* . (E*b*) (Vbl *b* . Univ (*b*⌢*epinv*⌢ (*a punto b*⌢*id*⌢*b*))))'.

Una proposición '------' de *L* es verdadera según esta definición si y sólo si cualquier abstracto de la forma '**x**∃(------ . **x** = **x**)' es universal.

Gracias al empleo de abstractos vacíos hemos de obtener una definición aún más sencilla. Cualquier abstracto de MS_D^L, '**x**∃------', es vacío si '------' es una proposición, porque la variable **x** no puede aparecer

libre en ella; '------' puede, pues, considerarse verdadera si y sólo si existe al menos un abstracto vacío correspondiente de la forma 'x3------' que sea universal.

(V) 'Vrd *a*' abrevia '(Prop *a* . (E*b*) (Vbl *b* . Univ (*b*⌢*epinv*⌢*a*)))'. Esto nos proporciona una variante particularmente sencilla de las tres definiciones dadas.

Tendremos una base para comparar estas diversas definiciones cuando hayamos considerado su *adecuación*.

C. Demostración de la adecuación

Se dice que una definición de la verdad en *L* es *adecuada*, o que el concepto en ella definido es adecuado, si y sólo si cada fórmula del metalenguaje MS_D^L de la forma

(T) 'Vrd *a* . ≡ . ------'

es demostrable en MS_D^L cuando en lugar de '*a*' ponemos la descripción estructural de '------', siendo '------' cualquier proposición de la parte traducente de MS_D^L [1].

Nuestra tarea es ahora demostrar dentro de MS_D^L que el concepto de verdad para *L* es adecuado en uno o varios de los sentidos definidos. Tomemos primero el concepto de verdad tal como se ha definido a base de las formas normales prenexuadas; demostrar la adecuación de esta definición es particularmente sencillo y directo: implica demostrar la *Primera regla de adecuación*, que es

TC1. ⊢ Vrd *a* . ≡ . ------, donde '*a*' se toma como descripción estructural de '------', '------' es una proposición de la parte traducente de MS_D^L y 'Vrd' se define con arreglo a (III) del parágrafo anterior, § B.

La demostración tiene dos partes, de las cuales la primera hace patente el condicional de izquierda a derecha y la segunda de derecha a izquierda. Mostramos primero que

(1) ⊢ Vrd *a* . ⊃ . ------,

donde (etc.). Mediante el Teorema de la forma normal prenexuada sabemos que

⊢ (x)---x--- . ≡ . ------,

si '(x)---x---' es una forma normal prenexuada de '------'. También es útil el siguiente lema:

Lema C1. Si se toma '*b*' como descripción estructural de la proposición '(x)---x---', de la parte traducente de MS_D^L, entonces

⊢ *c* S_{pd}^{epinv} *b* . ⊃ . (x)(*c* Den x . ≡ . ---x---).

(Este lema es válido en virtud de la primera Regla de denotación *(RDen1)* y *RSin4*). Si consideramos '*c*' como descripción estructural de 'x3---x---', entonces evidentemente el lema es válido;p ero si tomamos '*c*' como cualquier otra descripción estructural, no se cumple '*c* S_{pd}^{epinv} *b*' y, por tanto, el lema es válido; luego, en virtud de *RSin4*, sabemos que

[1] Cf. A. Tarski, *op. cit.*, pp. 305-6 y R. Carnap, *Introduction to Semantics*, pp. 26-9. Obsérvese que al requerir la *demostrabilidad* de las fórmulas de la forma (T), esta definición de adecuación difiere quizá de las de Tarski y Carnap.

el lema es válido para la variable '*c*'.) Utilizando el *Lema C1* tenemos que

$$\vdash b \text{ FNP } a \text{ . Univ } c \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : (x)(c \text{ Den } x \text{ . } \equiv \text{ . } \text{---}x\text{---}),$$

si (etc., como en la definición de 'adecuación') y '*b*' se toma como descripción estructural de '(x)---x---'. Luego también, puesto que 'Univ *c*' es una hipótesis, tenemos que

$$\vdash b \text{ FNP } a \text{ . Univ } c \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : (x)\text{---}x\text{---},$$

en donde (etc., acerca de '*a*' y '*b*'). Luego

(2) $$\vdash b \text{ FNP } a \text{ . Univ } c \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : \text{------},$$

en donde (etc., acerca de '*a*') y '*b*' se toma como descripción estructural de cierta forma normal prenexuada de '------'. Pero (2) se cumple también cuando '*b*' se toma como descripción estructural de cualquier expresión que no sea una forma normal prenexuada de '------', porque en este caso

$$\vdash \sim b \text{ FNP } a.$$

Luego (2) es válido cuando '*b*' sea una descripción estructural cualquiera. Empleando *RSin4* tenemos inmediatamente, pues, (1).

Para la segunda parte de la demostración hacemos ver que

(3) $$\vdash \text{------} \text{ . } \supset \text{ . Vrd } a,$$

donde se toma '*a*' como descripción estructural de '------'. Tomemos '(x)---x---', igual que antes, como forma normal prenexuada de '------'. Entonces

$$\vdash \text{------} \text{ . } b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b \text{ . } (x)\text{---}x\text{---},$$

en donde '*a*' se toma como descripción estructural de la proposición '------'. Por el *Lema C1* tenemos que

(4) $$\vdash \text{------} \text{ . } b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pn}^{epinv}\, b \text{ . } (x)\text{----}x\text{----}.$$
$$(x)(c \text{ Den } x \text{ . } \equiv \text{ . } \text{---}x\text{---}),$$

en donde (como anteriormente acerca de '*a*' y '*b*'). Por la sintaxis sabemos que

(5) $$\vdash b \text{ FNP } a \text{ . } \supset \text{ . PropUnivAt } b,$$

y que

$$\vdash \text{PropUnivAt } b \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : \text{ConsPred } c.$$

Tenemos así a partir de (4) que

$$\vdash \text{------} \text{ . } b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b \text{ . Univ } c,$$

en donde (como en (4)), y hemos empleado la definición de 'Univ'. De aquí resulta que

(6) $$\vdash \text{------} \text{ . } b \text{ FNP } a \text{ . } c\, S_{pd}^{epinv}\, b : \supset : \text{Vrd } a,$$

en donde (como en la fórmula anterior), y hemos utilizado la definición de 'Vrd' a partir de 'FNP'. Ahora podemos, evidentemente, demostrar, partiendo de la sintaxis, que

$$\vdash \text{PropUnivAt } b \text{ . } \supset \text{ . } (Ec)c\, S_{pd}^{epinv}\, b.$$

Empleando este resultado junto con (5), resulta de (6) que

$$\vdash \text{------} \text{ . } b \text{ FNP } a : \supset : \text{Vrd } a,$$

donde (como anteriormente). Pero sabemos por las hipótesis acerca de '*a*' y '*b*' que

$$\vdash b \text{ FNP } a$$

A partir de lo cual obtenemos (3). (3) y (1) juntos dan una demostración de la *Primera regla de adecuación.*

La demostración de la adecuación es algo más complicada cuando se hace sobre la base de (I) y (II) (requiere entonces varios lemas re-

ferentes a las formas normales conyuntivas); la omitiremos. Se llama *Segunda regla de adecuación (TC2)* al enunciado de que el concepto de verdad según lo definen (I) y (II) es adecuado.

Las demostraciones de las *Reglas de adecuación tercera* y *cuarta (TC3a* y *TC3b)* respectivamente para las definiciones (IV) y (V) son muy fáciles. La de (V) puede darse como sigue: empleando *RDen1* (o *TE2*(IV)) y *RSin4* tenemos inmediatamente que

Lema C2. $\vdash$ Vbl *b* . $\supset$. (*x*)((*b*$\frown$*epinv*$\frown$*a*) Den *x* . $\equiv$. ------), si se toma '*a*' como descripción estructural de una proposición '------'.

Está claro que esto es válido si se toma '*b*' como descripción estructural de una variable; si se considera '*b*' como una descripción estructural, pero no de una variable, la hipótesis es falsa: lo cual, por *RSin4*, verifica el lema. Luego también

$\vdash$ Vrd *a* . $\supset$. (E*b*)(Vbl *b* . (x)((*b*$\frown$*epinv*$\frown$*a*) Den x . $\equiv$. ------) . (x) (*b*$\frown$*epinv*$\frown$*a*) Den x),

si se toma '*a*' como descripción estructural de una proposición '------'. Luego

$$\vdash \text{Vrd } a \;.\; \supset \;.\; (\text{x})\text{------},$$

o, puesto que el cuantificador '(x)' es vacío,

$$\vdash \text{Vrd } a \;.\; \supset \;.\; \text{------},$$

en donde (etc., acerca de '*a*'). Inversamente, si se toma '*a*' como descripción estructural de una proposición,

$$\vdash \text{Prop } a,$$

y de ahí, por el *Lema C2*,

$\vdash$ ------ . Vbl *b* : $\supset$: Prop *a* . Vbl *b* . (x)((*b*$\frown$*epinv*$\frown$*a*) Den x . $\equiv$. ------) . (x)------,

en donde (etc., acerca de '*a*'). Observando que

$$\vdash (\text{E}b)\text{Vbl } b,$$

y que

$$\vdash \text{Vbl } b \;.\; \supset \;.\; \text{ConsPred } (b\frown epinv\frown a),$$

si (etc., acerca de '*a*'), tenemos que

$$\vdash \text{------} \;.\supset\; .\; \text{Vrd } a,$$

si (etc., acerca de '*a*'). Esto completa la demostración de que la definición (V) es adecuada. La de (IV) es análoga.

Las demostraciones de adecuación para las definiciones dadas establecen también su equivalencia mutua, como puede verse observando que cualquier proposición que es verdadera según una definición lo es también según cualquier otra, y viceversa.

Con vistas al desarrollo subsiguiente supondremos que 'Vrd' está definido por la definición particularmente sencilla (V) del § B (a base de abstractos vacíos).

Indicamos ahora dos importantes consecuencias de la (cuarta) Regla de adecuación. La primera es la *Regla de negación:* establece que si '*a*' se toma como descripción estructural de una proposición, entonces *a* es falsa si y sólo si *(tilde a)* es verdadera.

TC4. $\vdash \sim$Vrd *a* . $\equiv$. Vrd (*tilde a*), si se toma '*a*' como descripción estructural de una proposición '------' de la parte traducente de MS^{L}_{D}. La demostración, que emplea la (cuarta) Regla de adecuación, es inmediata si observamos que, por la hipótesis, '(*tilde a*)' es la descrip-

ción estructural de '~------'. De un modo parecido puede demostrarse la *Regla de disyunción.*

TC5. ⊢ Vrd *a* . v . Vrd *b* : ≡ : Vrd (*a uve b*), si se toman '*a*' y '*b*' como descripciones estructurales de proposiciones de la parte traducente de MS_D^L.

Utilizando *RSin4* podemos demostrar también que

TC6. ⊢ Prop *a* : ⊃ : ~Vrd *a* . ≡ . Vrd (*tilde a*),

y

TC7. ⊢ Prop *a* . Prop *b* : ⊃ : Vrd (*a uve b*) . ≡ . (Vrd *a* . v . Vrd *b*).

D. Correspondencia

El poner la adecuación como condición no es un deseo gratuito: ahora que hemos mostrado que las definiciones dadas son adecuadas, tenemos la seguridad de que proporcionan una correspondencia apropiada entre las expresiones de *L* y los objetos del campo fundamental de *L*. Parece esencial que exista una correspondencia de este tipo si hemos de usar el concepto de verdad en determinadas tareas (véanse, más adelante, el § E y los §§ H-I); este tipo de correspondencia es también importante en terrenos más específicamente filosóficos: pues muestra que el concepto de verdad tal como ha sido definido está esencialmente de acuerdo con ideas muy antiguas acerca del significado de 'verdad'.

Cuando, dentro del contexto de un lenguaje sistemático, afirmamos que ------, ello equivale a decir, según la condición de adecuación, que la expresión '*a*' es verdadera, en donde se toma '*a*' como descripción estructural de la proposición '------'. Seguramente nuestro empleo habitual del término 'verdadero' aplicado a proposiciones declarativas es más o menos vago e indefinido; y, sin embargo, parece que 'verdadero' se aplica habitualmente a estas proposiciones de modo tal que se verifica esta equivalencia; podemos, pues, pensar que la precisa concepción semántica moderna de la verdad da una explicación—en el sentido de Carnap (I,E)—de conceptos anteriores de la verdad.

Parece asimismo que se obtiene el resultado de lo que tradicionalmente se llama 'teoría de la verdad por la correspondencia' cuando ocurre la condición de adecuación. El significado exacto de esta doctrina queda muy poco claro sin una explicación precisa de lo que se entiende por 'correspondencia'. Dado un sistema lingüístico *L*, podemos aclararla un poco diciendo que una proposición *a* de *L* es verdadera si y sólo si lo que *a* afirma de los objetos de *L* ocurre efectivamente; si adelantamos un paso más y separamos de esta última frase las palabras que no sean fundamentales, acabamos enunciando una Regla de adecuación. Luego la llamada teoría de la verdad por la correspondencia parece quedar explicada por las modernas definiciones semánticas de aquélla en las que se verifica la condición de adecuación. Naturalmente, 'correspondencia' no aparece en absoluto como término técnico en las definiciones exactas; pero el exigir la adecuación parece garantizar que se da el tipo de correspondencia deseado.

Se puede considerar, pues, siguiendo a Tarski, que la teoría semántica moderna de la verdad incorpora la concepción aristotélica clásica de ésta [1]. Si preguntásemos *en qué condiciones* una proposición en un sistema formal apropiado es verdadera o falsa, podría responderse según la concepción clásica con la famosa frase de Aristóteles:

Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es o de lo que no es que no es, es verdadero [2]. Si la definición de la verdad ha de conformarse a esta concepción, deben ser válidas todas las equivalencias de la forma siguiente:

La proposición '------' es verdadera si y sólo si ------.

En otras palabras, debe cumplirse la condición de adecuación.

La condición de adecuación no debe, sin embargo, confundirse con una *definición* de la verdad. En cierto sentido, podría pensarse que hay que considerar un caso particular de una Regla de adecuación (en que se tome '*a*' como descripción estructural de una proposición específica '------') como definición parcial de la verdad, es decir, como definición de la verdad sólo para la proposición *a*. Pero la definición completa de verdad ha de ser más general, y debe darse para la *variable* '*a*'. La situación en la semántica es parecida a la que se produciría en aritmética si, por ejemplo, quisiéramos definir '+': no nos contentaríamos con definiciones de sólo '(2 + 3)', '(6 + 7)', etc., sino que exigiríamos una definición de '$(x + y)$', siendo x e y variables numéricas; así también en semántica necesitamos una definición de 'Vrd *a*' para la variable '*a*'. Igual que en aritmética la definición general de '$(x + y)$' es de hecho la suma lógica de un número infinito de definiciones parciales, así en semántica la definición general de verdad logra el efecto de una conyunción lógica infinita de todas las definiciones parciales del tipo mencionado. Igual que en aritmética hemos de asumir, de cierta forma, ecuaciones recurrentes o presuponer una lógica básica de gran alcance, así en semántica hemos de suponer una poderosa subestructura lógica o lograr el efecto de tales conyunciones infinitas de algún otro modo. Aquí se toma como elemento primitivo especial la denotación múltiple, la cual nos permite obtener lo que de otro modo sólo puede lograrse empleando medios lógicos de mayor alcance [3] (véase (VII, E), más adelante). Dada una definición general de verdad, como las anteriormente dadas a base de la denotación múltiple, se *demuestra* una Regla de adecuación correspondiente; y se tiene entonces la seguridad de que la definición proporciona un concepto de verdad para el lenguaje estudiado que está aproximadamente de acuerdo con la concepción clásica.

---

[1] Además de *Der Wahrheitsbegriff*, véase el trabajo popular de TARSKI «The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics», *Philosophy and Phenomenological Research*, 4 (1944), pp. 341-76 [traducción española, «La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica», en *Antología Semántica*, compilada por MARIO BUNGE; Nueva Visión, Buenos Aires, (1960) *(T.)*]. Véase también, p. ej., A. KAPLAN, «What Good is 'Truth'?», *ibid.*, 15, (1954), pp. 151-70.

[2] Cf. ARISTÓTELES, p. ej., *Metafísica*, 1017^a7, 30-5. Ver también I. M. BOCHENSKI, *Ancient Formal Logic* (Nort-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951), p. 31. Véase también SANTO TOMAS, *De Veritate*, Qu. I, Art. I, Resp.

[3] Como, por ejemplo, se hace en *Der Wahrheitsbegriff*.

Se debe recalcar que las definiciones semánticas de la verdad no proporcionan un criterio mediante el cual podamos determinar si una proposición dada es o no verdadera: la definición semántica nos da únicamente un análisis de lo que significa decir que una proposición es verdadera, es decir, una condición necesaria y suficiente bajo la cual podemos adscribir correctamente 'verdadera' a una proposición. El decidir por medio de observaciones o experimentos, o por cualquier otro método, si una proposición es de hecho verdadera o falsa, no es asunto de la semántica: es, a grandes rasgos, la tarea de las ciencias especiales. La distinción que hemos hecho entre proporcionar un criterio y realizar un análisis es evidente, pero con frecuencia se pasa por alto.

Carecerá, simplemente, de valor el rechazar el concepto semántico de verdad por su presunta falta de interés filosófico, como han intentado hacer muchos filósofos. Tenemos en la semántica moderna una explicación plena y lograda del concepto de verdad, un análisis lógico de uno de los conceptos filosóficos históricamente más importantes, en tanto que este concepto se aplica a las proposiciones de ciertas clases de sistemas lingüísticos formalizados. Los filósofos que trabajan con sistemas lingüísticos formalizados, en vez de hacerlo con lenguajes naturales quizá incoherentes, están simplemente intentando realizar con más cuidado y con instrumentos intelectuales más seguros lo que los filósofos de vocación analítica han intentado siempre realizar. En el caso del concepto semántico de verdad, el análisis o explicación parece haber dado resultados totalmente satisfactorios: el antiguo problema del significado del predicado de verdad ha quedado plenamente esclarecido, si limitamos nuestra atención a cierto tipo de sistemas lingüísticos formalizados. En el capítulo I hemos comentado con cierta amplitud lo conveniente de esta limitación.

E. Coherencia semántica de L

Acabamos de dar una razón de la extraordinaria importancia del concepto semántico de verdad: la de que proporciona una explicación de un importante concepto filosófico. Pero hay también otras razones, una de las cuales presenta especial interés en relación con el concepto de *coherencia*. De hecho, un metalenguaje semántico que contenga un concepto de verdad para L adecuado posee, por regla general, el alcance suficiente para permitirnos demostrar que L es coherente.

Para ser algo más precisos recordemos de (III, H) que un sistema lingüístico L, del tipo que estudiamos, es *compatible* o *coherente* si no existe ninguna fórmula a tal que a y (*tilde* a) sean ambas teoremas de L. Supongamos ahora que sabemos que L es incoherente: entonces sabemos también que existe al menos una fórmula **A** de L tal que **A** y su negación son ambas teoremas. Pero, recordando la ley de la lógica de funciones veritativas *TB33*(II):

$$\vdash \mathbf{A} \,.\, \sim\mathbf{A} : \supset : \mathbf{B},$$

en la que **A** y **B** son fórmulas cualesquiera de *L*, y suponiendo que

$$\vdash \mathbf{A} \text{ y } \vdash \sim\mathbf{A}$$

podemos demostrar que

$$\vdash \mathbf{B}$$

para todo **B**; luego cualquier fórmula **B** de *L* es un teorema y, si **B** es una proposición, es de presumir que sea verdadera (véase, más adelante, el *TE5a)*. Por tanto, en un *L* incoherente todas las proposiciones de *L* son verdaderas; todo *L* de este tipo parece carecer totalmente de interés científico o filosófico: en un *L* que sea incoherente en este sentido fundamental, se desvanece la distinción entre verdad y falsedad, no habría razones para intentar demostrar un teorema en un *L* incoherente (porque se podría demostrar su negación con igual facilidad), y tampoco tendría sentido para un científico tratar de verificar por observaciones o experimentos una proposición de un *L* cuya incoherencia conociese, pues ya sabría que era verdadera; igual que sabría que era falsa.

Una de las razones de la utilidad del concepto semántico de verdad es la de que proporciona la base para una demostración de coherencia de amplia aplicabilidad. Con un metalenguaje semántico que contenga un concepto adecuado de verdad para *L* podemos demostrar por regla general la coherencia de *L*; y gran parte del interés matemático del concepto semántico de verdad nace de esta circunstancia.

Mostraremos ahora cómo puede demostrarse, dentro de MS^L_D, la coherencia simple de *L*.

Para demostrar que *L* es coherente debemos, naturalmente, emplear un razonamiento, y desarrollar un razonamiento es permitir ciertos métodos de deducción. Para dar una demostración de coherencia es siempre esencial especificar cuidadosamente qué métodos se permiten, sin lo cual la demostración queda incompleta y se carece de base para juzgar si es correcta. Aquí los métodos permitidos son los de MS^L_D, pero no sólo sus reglas lógicas, sino las lógicas y las no lógicas juntas: para la demostración de la coherencia de *L* necesitamos la totalidad de MS^L_D. Demostraremos, pues, la coherencia simple de *L* mediante un razonamiento semántico.

Necesitamos unos cuantos teoremas preliminares referentes al concepto de verdad. El primero establece que todo axioma (lógico o no lógico) de *L* tiene una clausura (en el sentido de 'Clau'') verdadera.

TE1a. $\vdash (a)(\mathrm{Ax}\ a\ .\ \supset\ .\ (\mathrm{E}b)(b\ \mathrm{Clau}'\ a\ .\ \mathrm{Vrd}\ b))$.

La demostración no es difícil. Sea '*a*' la descripción estructural de una expresión '------' de la parte traducente de MS^L_D que no contenga variables libres. Supongamos que '------' es un axioma y también una fórmula; por la (cuarta) Regla de adecuación,

$$\vdash \mathrm{Vrd}\ a\ .\ \equiv\ .\ \text{------},$$

pero también

$$\vdash \text{------}.$$

Así, *TE1a* se cumple para un '*a*' escogido de este modo. Supongamos después que '*a*' se toma como axioma, pero no como proposición; entonces, por un razonamiento análogo, existe cierta clausura de *a* que

es verdadera, y para la cual es válido *TE1a*. Si finalmente se toma '*a*' como descripción estructural, pero no de un axioma, entonces

$$\vdash \sim \mathrm{Ax}\ a,$$

y por tanto se cumple *TE1a*. Con estos tres casos y *RSin4* se llega a *TE1a*.

Asimismo, usando la definición de 'Vrd', tenemos inmediatamente que

TE1b. $\vdash \mathrm{Vrd}\ a\ .\supset .\ \mathrm{Prop}\ a.$

La ley siguiente establece que si *a* es verdadera y *b* es una generalización de *a*, entonces *b* es verdadera.

TE2. $\vdash \mathrm{Vrd}\ a\ .\ b\ \mathrm{Gen}\ a : \supset : \mathrm{Vrd}\ b.$

La demostración no es difícil si recordamos la ley (*TC7a* de (II)) referente a los cuantificadores vacíos: sea '------' una proposición de la parte traducente de MS_D^L; sabemos entonces por *TC7a* (II) que

(3) $\vdash$ ------ . $\supset$. (x)------,

siendo x cualquier variable traducente. Tomando '*a*' como descripción estructural de '------' y '*b*' como descripción estructural de '(x)------', por (3) y la Regla de adecuación,

(4) $\vdash \mathrm{Vrd}\ a\ .\ b\ \mathrm{Gen}\ a : \supset : \mathrm{Vrd}\ b.$

Supongamos ahora que '*b*' se toma como descripción estructural de una expresión que no sea una generalización de *a*. Entonces

$$\vdash \sim b\ \mathrm{Gen}\ a,$$

luego (4) es válido para todo *b*, por *RSin4*. Finalmente, si tomamos '*a*' como descripción estructural de algo que no sea una proposición,

$$\vdash \sim \mathrm{Prop}\ a,$$

de donde, por *TE1b*,

$$\vdash \sim \mathrm{Vrd}\ a.$$

Luego (4) es válido para todo *a*, por *RSin4*.

Tenemos una ley análoga acerca del *Modus Ponens*.

TE3. $\vdash \mathrm{Vrd}\ a\ .\ \mathrm{Vrd}\ b\ .\ c\ \mathrm{MP}\ a,b : \supset : \mathrm{Vrd}\ c.$

La demostración es parecida a la anterior.

Combinando *TE2* y *TE3* tenemos que

TE4a. $\vdash (c)\ (d)\ (e)\ (\mathrm{Vrd}\ d\ .\ \mathrm{Vrd}\ e\ .\ c\ \mathrm{CI}\ d,e : \supset : \mathrm{Vrd}\ c),$

y como corolario,

TE4b. $\vdash (\mathrm{E}d)\ (d\ \mathrm{Clau'}\ a\ .\ \mathrm{Vrd}\ d)\ .\ (\mathrm{E}d)\ (d\ \mathrm{Clau'}\ b\ .\ \mathrm{Vrd}\ d)\ .\ c\ \mathrm{CI}\ a,b : \supset : (\mathrm{E}d)\ (d\ \mathrm{Clau'}\ c\ .\ \mathrm{Vrd}\ d).$

El teorema siguiente constituye un lema importante para la demostración de coherencia de *L*. Establece que todos los teoremas de *L* que son proposiciones son verdaderos.

TE5. $\vdash (a)\ (\mathrm{Prop}\ a\ .\ \mathrm{Teor}\ a : \supset : \mathrm{Vrd}\ a).$

Esto se demuestra por la Regla de ingredientes enmarcados, *TG4* (de (III)), por la cual

$\vdash a\ \mathrm{IngEnm}\ b\ .\ (c)\ (c\ \mathrm{IngEnm}\ b : \supset : (\mathrm{E}a')\ (a'\ \mathrm{Clau'}\ c\ .\ \mathrm{Ax}\ c)\ .\mathrm{v}.\ (\mathrm{E}d)\ (\mathrm{E}e)\ (d\ \mathrm{Ant}_b\ c\ .\ e\ \mathrm{Ant}_b\ c\ .\ c\ \mathrm{CI}\ d,e))\ .\ (c)\ (\mathrm{Ax}\ c\ .\supset .\ (\mathrm{E}a')\ (a'\ \mathrm{Clau'}\ c\ .\ \mathrm{Vrd}\ c))\ .\ (c)\ (d)\ (e)\ ((\mathrm{E}a')\ (a'\ \mathrm{Clau'}\ d\ .\ \mathrm{Vrd}\ a')\ .\ (\mathrm{E}a')\ (a'\ \mathrm{Clau'}e\ .\ \mathrm{Vrd}\ a')\ .\ c\ \mathrm{CI}\ d,e : \supset : (\mathrm{E}a')\ (a'\ \mathrm{Clau'}\ c\ .\ \mathrm{Vrd}\ a')) : \supset : (\mathrm{E}a')\ (a'\ \mathrm{Clau'}\ a\ .\ \mathrm{Vrd}\ a').$

Pero la tercera y la cuarta de estas hipótesis están formuladas como teoremas por *TE1a* y *TE4b*, luego podemos abandonarlas; llegamos a *TE5* mediante una adecuada generalización, y en virtud de *TG12c*

(III), y de la definición de 'Teor'. (Obsérvese que *TE5* podría también demostrarse a la manera de *TE1a;* pero cf. *TD10* (IX), más adelante.)

Se necesita aún un lema más:

TE6. $\vdash$ Prop a . $\supset$. $\sim$(Vrd a . Vrd (*tilde a*)).

La demostración es inmediata valiéndose de *TC6.*

La *Primera regla de coherencia* es la siguiente:

TE7. $\vdash$ $\sim$(Ea) (Prop a . Teor a . Teor (*tilde a*)).

Para demostrarlo observamos que

$\vdash$ Prop a . Teor (*tilde a*) :$\supset$: Vrd (*tilde a*),

por *TE5* y *TG8e* (III). Empleando de nuevo *TE5*, tenemos que

$\vdash$ Prop a . (Teor a . Teor (*tilde a*)) :$\supset$: (Vrd a . Vrd (*tilde a*)),

y por tanto que

$\vdash$ Prop a . $\sim$(Vrd a . Vrd (*tilde a*)) :$\supset$: $\sim$(Teor a . Teor (*tilde a*)).

De aquí obtenemos *TE7* apoyándonos en *TE6.*

Puede demostrarse una *Segunda regla de coherencia* según la cual no existe ninguna *fórmula*, ya sea proposición o no, tal que ella y su negación sean ambas teoremas.

TE8. $\vdash$ $\sim$(Ea) (Fmla a . Teor a . Teor (*tilde a*)).

Cabe demostrar esto indirectamente suponiendo que exista una fórmula semejante; en tal caso, por la sintaxis admitida,

$\vdash$ Teor a . Teor (*tilde a*) :$\supset$: Teor (*a punto tilde a*)

$\vdash$ Fmla a . Teor (*a punto tilde a*) . Prop b :$\supset$: Teor b,

y

$\vdash$ Fmla a . Teor (*a punto tilde a*) . Prop b :$\supset$: Teor (*tilde b*).

Luego

$\vdash$ Fmla a . Teor a . Teor (*tilde a*) . (Eb) Prop b :$\supset$: (Eb) (Prop b . Teor b . Teor (*tilde b*)).

Por contraposición y *TE7* obtenemos *TE8*, observando que

$\vdash$ (Eb)Prop b

Estas demostraciones de coherencia hacen patente que dentro de MS^L_D puede establecerse la coherencia de L; y adviértase que podemos establecerla ya sea L en realidad coherente o no. Pues, si L es incoherente, entonces MS^L_D, que contiene una traducción de L, lo es también y, por tanto, contiene como teoremas todas sus fórmulas; pero si L es coherente, y más si es coherente junto con la sintaxis, entonces MS^L_D es también coherente, como veremos dentro de un momento (cf. también (XIII, E)).

F. Algunos conceptos semánticos ulteriores

A base del concepto semántico de verdad para L pueden definirse otros varios importantes conceptos semánticos [1], algunos de los cuales son importantes por sí mismos o corresponden de un modo más o menos tosco a importantes conceptos de uso corriente.

Evidentemente, una proposición es *falsa* si y sólo si no es verdadera.

'Fls a' abrevia '(Prop a . $\sim$Vrd a)'

[1] Cf. R. Carnap, *Introduction to Semantics*, pp. 35-40 y otras.

Se dice que una proposición *a implica* (*materialmente*) una proposición *b* si y sólo si *a* es falsa o *b* es verdadera.

'*a* Imp *b*' abrevia '(Prop *a* . Prop *b* . Fls *a* .v. Vrd *b*)'.

Una proposición *a* es *equivalente* a una proposición *b* si y sólo si *a* y *b* son ambas verdaderas o ambas falsas.

'*a* Equiv *b*' abrevia '(Vrd *a* . Vrd *b* :v: Fls *a* . Fls *b*)'.

Se dice que unas proposiciones *a* y *b* están disyuntas o que son *miembros disyuntivos* si al menos una de ellas es verdadera

'*a* Disy *b*' abrevia '(Prop *a* . Prop *b* : Vrd *a* .v. Vrd *b*)',

y se dice que son *excluyentes* si no son ambas verdaderas,

'*a* Excl *b*' abrevia '(Prop *a* . Prop *b* . ~(Vrd *a* . Vrd *b*))'.

Finalmente, se dice que unas proposiciones *a* y *b* están conyuntas o que son *miembros conyuntivos* si son ambas verdaderas, es decir, si no son excluyentes,

'*a* Cony *b*' abrevia '(Prop *a* . Prop *b* . ~*a* Excl *b*)'.

Con la ayuda de estas definiciones podemos construir equivalentes semánticos precisos de las llamadas *tablas veritativas*. Ocupémonos primero de la negación. Es evidente que

TF1a. ⊢ Prop *a* :⊃: Vrd *a* . ≡ . ~Fls *a*,

y, naturalmente,

TF1b. ⊢ Prop *a* :⊃: Fls *a* . ≡ . ~Vrd *a*.

Acerca de la disyunción podemos demostrar que

TF2a. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: *a* Disy *b* . ≡ . (Vrd *a* . Vrd *b* :v: Vrd *a* . Fls *b* :v: Fls *a* . Vrd *b*),

y que

TF2b. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: ~*a* Disy *b* . ≡ . (Fls *a* . Fls *b*).

Tenemos también los siguientes teoremas referentes a la equivalencia:

TF3a. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: *a* Equiv *b* . ≡ . (Vrd *a* . Vrd *b* :v: Fls *a*. Fls *b*).

TF3b. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: ~*a* Equiv *b* . ≡ . (Vrd *a* . Fls *b* :v: Fls *a* . Vrd *b*).

En el caso de la relación Imp de la implicación material, tenemos que

TF4a. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: *a* Imp *b* . ≡ . (Vrd *a* . Vrd *b* :v: Fls *a* . Vrd *b* :v: Fls *a* . Fls *b*),

y que

TF4b. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: ~*a* Imp *b* . ≡ . (Vrd *a* . Fls *b*).

Y, finalmente, para la conyunción,

TF5a. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: Cony *b* . ≡ . (Vrd *a* . Vrd *b*),

y

TF5b. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: ~*a* Cony *b* . ≡ . (Vrd *a* . Fls *b* :v: Fls *a* . Vrd *b* :v: Fls *a* . Fls *b*).

Como consecuencias de *TC6* y *TC7* tenemos también que

TF6a. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: Vrd (*a dscd b*) . ≡ . *a* Imp *b*,

TF6b. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: Vrd (*a punto b*) . ≡ . *a* Cony *b*,

TF6c. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: Vrd (*a triguión b*) . ≡ . *a* Equiv *b*,

TF7a. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: *a* Imp *b* . ≡ . (Vrd *a* . ≡ . Vrd *b*),

y

TF7b. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: *a* Equiv *b* . ≡ . (Vrd *a* . ≡ . Vrd *b*).

Es evidente, por *RDen2*, que las constantes lógicas 'v', '~', etc., no

pueden considerarse denotadoras en el sentido de 'Den', por no ser constantes predicativas. Esto no obstante, podemos demostrar las destacadas propiedades semánticas de estos conceptos, como hacen ver los teoremas anteriores: en particular, *TC6* y *TC7* dan las propiedades semánticas básicas de '$\sim$' y 'v' respectivamente, y los teoremas que acabamos de reseñar dan las propiedades básicas de '.', '$\supset$' y '$\equiv$'. Estos conceptos se interpretan en MS_D^L, en el sentido de que la verdad (o falsedad) de los enunciados de L que los contienen es reductible a la verdad (o falsedad) de los elementos que constituyen dichos enunciados. Así pues, para nuestros fines actuales no hay ninguna necesidad de considerar que '$\sim$' o 'v' denoten en ningún sentido.

En (III, H) se definió el concepto de completitud de una clase virtual de proposiciones: aquel concepto era sintáctico, pues no se hacía en el definiens referencia alguna a conceptos semánticos. Ahora podemos definir un concepto *semántico* de completitud —a base del concepto semántico de verdad— del modo siguiente:

'CmpltSem F' abrevia '((*a*) (F*a* . $\supset$. Prop *a*) . (*a*) (Vrd *a* . F*a* :$\supset$: Teor *a*))'.

Una clase virtual de proposiciones es completa en este sentido siempre que cada proposición verdadera que sea miembro de ella sea un teorema de L.

Estos dos conceptos de completitud para L son equivalentes partiendo de una hipótesis adecuada acerca de F.

TF8. $\vdash$ (*a*) (F*a* . $\supset$. F(*tilde a*)) :$\supset$: Cmplt F . $\equiv$. CmpltSem F.

La demostración de derecha a izquierda se apoya en *TC6*; para la de izquierda a derecha, observamos que, por *TE5*,

$\vdash$ (*a*) (F*a* :$\supset$: Prop *a* . ($\sim$Teor *a* . $\supset$. Teor (*tilde a*))) . $\supset$. (*a*) (F*a* . $\supset$. Prop *a*) . (*a*) (F*a* . $\sim$Vrd (*tilde a*) :$\supset$: Teor *a*).

De ahí el teorema (utilizando de nuevo *TC6*).

Si tomamos aquí F como 'a_3Prop *a*', obtenemos un teorema que dice que L es completo en uno de estos sentidos si y sólo si es también completo en el otro.

En L —y, por tanto, en MS_D^L— podemos lograr el mismo efecto que se obtiene cuando se dice que el dominio fundamental de L se compone de un solo objeto, de dos objetos, etc., para cualquier n fijo finito. Sea

'DF*L*1' la abreviatura de '(*x*) (*y*)$y = x$',

'DF*L*2' la de '(E*x*) (E*y*) ($\sim x = y$. (*z*) ($z = x$. v . $z = y$))',

etcétera. Existen sistemas L cuyos dominios fundamentales se componen sólo de un número fijo finito n de objetos, y por ello estos conceptos pueden ser útiles al describir algunas de sus propiedades semánticas.

Observamos finalmente (y esto será útil más tarde) que existe un L que es completo, coherente, y cuyo campo fundamental se compone de *un solo* objeto. Para ver esto, supongamos que L contiene una sola constante predicativa primitiva monádica, 'P', y dos reglas no lógicas, a saber

$$\vdash \mathbf{P}x,$$

y

$$\vdash x = y.$$

Llamaremos L^* a este sistema. Intentamos demostrar, dentro de MS_D^{L*}, que

$$\vdash \text{Coher } a_3\text{Prop } a \;.\; \text{Cmpl } a_3\text{Prop } a \;.\; \text{DFL*1}.$$

Se sigue de *TE7* que

$$\vdash \text{Coher } a_3\text{Prop } a.$$

Es inmediato que se cumple 'DFL*1'; pero podemos mostrar también que *toda* fórmula de L^* es un teorema y, por tanto, que L^* es completo; con este objeto anotamos los siguientes teoremas sintácticos:

TF9a. $\vdash (c)(d)(e)((\text{Teor } d \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } d)) \;.\; (\text{Teor } e \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } e)) \;.\; c = (d \textit{ uve } e) :\supset: \text{Teor } c \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } c))$.

TF9b. $\vdash (c)(d)((\text{Teor } d \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } d)) \;.\; c = (\textit{tilde } d) :\supset: \text{Teor } c \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } c))$.

TF9c. $\vdash (c)(d)((\text{Teor } d \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } d)) \;.\; (c \text{ Gen } d \text{ .v. } c \text{ Abst } d) :\supset: \text{Teor } c \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } c))$.

Luego,

TF10. $\vdash (c)(d)(e)((\text{Teor } d \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } d)) \;.\; (\text{Teor } e \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } e)) \;.\; (c = (\textit{tilde } d) \text{ .v. } c = (d \textit{ uve } e) \text{ .v. } c \text{ Gen } d \text{ .v. } c \text{ Abst } d) :\supset: \text{Teor } c \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } c))$.

(*TF9c* es válido en todo L, en virtud de *TF10*). Pero para L^* también

TF11a. $\vdash (a)\ (\text{FmlaAt } a \;.\supset.\; \text{Teor } a)$.

Adviértase que los dos axiomas de L^* son ambos fórmulas atómicas; pero generalizándolas y utilizando después *R5'* podemos demostrar como teorema cualquier otra fórmula atómica. Tenemos como consecuencia inmediata de *TF11a* que

TF11b. $\vdash (a)\ (\text{FmlaAt } a :\supset: \text{Teor } a \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } a))$,

Empleando ahora *TF10* y la Regla de ingredientes enmarcados, *TG4* (III), tenemos que

TF12a. $\vdash (a)(\text{Fmla } a :\supset: \text{Teor } a \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } a))$,

Luego también que

TF12b. $\vdash (a)\ (\text{Prop } a :\supset: \text{Teor } a \text{ .v. Teor } (\textit{tilde } a))$.

Sabemos así que L^* es completo, y por tanto que

TF13. $\vdash \text{Coher } a_3\text{Prop } a \;.\; \text{Cmplt } a_3\text{Prop } a \;.\; \text{DFL*1}$.

TF13 no tiene de por sí gran importancia, pero será útil en (IX, G), para la demostración de la coherencia relativa de la semántica intraducente.

G. Coherencia relativa de MS_D^L

Hemos mostrado anteriormente que podemos establecer la coherencia de L dentro de MS_D^L. Pero, ¿qué seguridad tenemos de que las propias reglas y axiomas de MS_D^L no conducen a contradicción? Para poder dar una respuesta completa a esta pregunta necesitaríamos, naturalmente, una demostración de coherencia para la totalidad de MS_D^L; no daremos aquí tal demostración, cuyo carácter dependería fundamentalmente de la estructura axiomática de L; pero si por el momento suponemos que L, junto con la sintaxis elemental, es coherente

(en un sentido apropiado), entonces podemos mostrar que MS_D^L es también coherente, del modo que sigue [1].

Supongamos que el sistema lingüístico que obtenemos adjuntando a *M* una traducción de *L* sea coherente; a partir de este lenguaje conjunto formamos MS_D^L, tomando 'Den' como elemento primitivo adicional. Las dos Reglas que hemos adoptado referentes a 'Den' son *RDen1* y *RDen2* (IV, D); recordemos que *RDen1* es una especie de ley de reductibilidad: todas las cuestiones acerca de si ciertas expresiones de *L* denotan tales y cuales objetos deben solventarse en MS_D^L recurriendo fundamentalmente a esta ley; las cuestiones referentes a la denotación se reducen, en efecto, a cuestiones no lingüísticas, y cualquier contradicción que se haya de obtener a partir de *RDen1* se reduce inmediatamente a una contradicción en *L*.

Sea **A** una fórmula de MS_D^L, en la notación primitiva, que contenga una o varias apariciones de 'Den' en contextos de la forma '*a* Den **x**', tomando '*a*' como descripción estructural de 'P' o de un abstracto 'xɜ---x---' que no contenga variables libres. Supongamos que queremos demostrar **A** dentro de MS_D^L: procederíamos del modo siguiente. Se construye primero una fórmula correspondiente, **A'**, de MS_D^L que no contenga apariciones de 'Den', remplazando todas las partes '*a* Den **x**' de **A** por '---**x**---' (si '*a*' se toma como 'xɜ---x---') o por 'P**x**' (si '*a*' se toma como '*pe*'). Si $\vdash$ **A'** de MS_D^L sin usar *RDen1*, entonces podemos demostrar que $\vdash$ **A**. Para ello basta observar simplemente que

(1) $$\vdash \mathbf{A'} \equiv \mathbf{A},$$

suponiendo *RDen1*. Si encontrásemos que **A** conducía a una contradicción, **A'** lo haría también; pero si **A'** es demostrable sin emplear *RDen1*, no puede conducir a una contradicción, dado el supuesto de que las partes traducentes y sintácticas de MS_D^L son, juntas, coherentes. Luego los casos particulares de *RDen1* empleados para demostrar (1) son coherentes con los axiomas precedentes de MS_D^L y, si los añadimos a las reglas de MS_D^L, la única contradicción que podría resultar sería una que pudiera demostrarse a partir de las reglas precedentes.

Puede hacerse ver del mismo modo que cualquier otro número finito de casos particulares de *RDen1* posee una coherencia relativa análoga. Pero todos los casos particulares de *RDen1* forman juntos un todo infinito. Supongamos, por un momento, que podamos demostrar una contradicción a partir de este todo infinito: en dicha demostración podemos emplear o no *RSin4;* supongamos que no lo hacemos. Cualquier contradicción de este tipo puede, pues, transformarse en una contradicción demostrable a partir de una clase finita de casos particulares de *RDen1*, porque en este caso la demostración sólo puede comprender un número finito de etapas y, por tanto, sólo puede utilizarse un número finito de casos particulares de *RDen1;* ahora bien, cualquier clase finita de casos particulares de *RDen1* es relativamente coherente del modo indicado. Por lo tanto, no puede demostrarse ninguna contradicción a partir de la totalidad de los casos particulares de *RDen1* si *no* se utiliza *RSin4*. Supongamos ahora que *sí* se utiliza *RSin4* en la

[1] Cf. TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 379-86.

supuesta demostración de la contradicción, junto con todos los casos particulares de *RDen1*; podemos suponer después que se lleva a cabo el procedimiento de remplazamiento del párrafo anterior, deduciendo así la contradicción sin usar *RDen1*. Por lo tanto, a partir de la totalidad de los casos particulares de *RDen1* no puede deducirse ninguna contradicción usando *RSin4* si la sintaxis y el lenguaje objeto subyacentes son coherentes juntos.

Si añadimos ahora *RDen2* a las precedentes reglas de MS_D^L, se sigue un resultado análogo. A partir de *RDen2* podemos demostrar inmediatamente que

(2) $\vdash a \text{ Den } x \,.\supset.\, \text{ConsPred } a,$

si '*a*' se toma como descripción estructural de 'P' o de un abstracto (que no contenga variables libres), y también que

(3) $\vdash a \text{ Den } x \,.\supset.\, \text{ConsPred } a,$

si '*a*' se toma como descripción estructural de una expresión de *L* que *no* sea la descripción estructural de 'P' o de un abstracto. (También podemos obtener *RDen2* a partir de (2) y (3) juntos, empleando *RSin4*, de suerte que (2) y (3) juntos son deductivamente equivalentes a *RDen2*). Consideremos ahora cualquier teorema **A** de MS_D^L que contenga 'Den' y que se pueda demostrar sin utilizar *RDen2*. Por lo pronto, **A** no puede ser contradictorio, excepto si el conjunto de *M* y *L* contiene ya una contradicción. Supongamos ahora primero que **A** contiene 'Den' sólo en contextos '*a* Den **x**' (en donde '*a*' se toma como descripción estructural de 'P' o de un abstracto y **x** es cualquier variable de la parte traducente de MS_D^L); en este caso, *a* es ya una constante predicativa, de modo que nada más puede demostrarse por *RDen2* (más específicamente, por (2)): en particular, pues, empleando *RDen2* no puede demostrarse ninguna contradicción. Consideremos ahora un **A**, demostrable sin usar *RDen2*, que contenga una parte de la forma '*a* Den **x**' en la que '*a*' se tome como descripción estructural, pero no de 'P' ni de un abstracto. Ningún **A** de este tipo es contradictorio, por hipótesis. Para todo '*a*' de la clase indicada sabemos que

$$\vdash \sim\text{ConsPred } a,$$

y, por tanto, por *RDen2* (o (3)),

$$\vdash (\mathbf{x}) \sim a \text{ Den } \mathbf{x}.$$

Formemos ahora **A**′ a partir de **A** remplazando todas las partes de la forma '*a* Den **x**' por '(**P x** . ∼**P x**)'; es evidente entonces que

$$\vdash a \text{ Den } \mathbf{x} \,.\equiv.\, (\mathbf{P\,x} \,.\sim\mathbf{P\,x}),$$

dada la hipótesis acerca de '*a*'; por lo tanto

$$\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}',$$

y cualquier contradicción demostrada mediante el uso de *RDen2* es reductible a otra demostrada sin él. Luego no puede surgir ninguna contradicción a consecuencia de añadir *RDen2* a las otras reglas.

Este razonamiento es todavía algo vago y está establecido sin formalizar, en un lenguaje natural; para hacerlo más preciso sería necesario utilizar un meta-metalenguaje formalizado. Sin embargo, no hay necesidad de construir semejante lenguaje, dada nuestra presente finalidad, y este argumento no formalizado debe bastar para convencernos de la coherencia relativa de MS_D^L.

H. Autorreferencia

Sabemos por el apartado anterior que si el conjunto de L y M es coherente, MS_D^L lo es también y, por tanto, que no pueden surgir las paradojas semánticas, en particular la de Epiménides (tratada muy someramente en (I, F)). Tenemos, por tanto, la seguridad de que MS_D^L proporciona una base segura para la semántica de L.

Al construir MS_D^L se ha mantenido meticulosamente la distinción entre lenguaje objeto y metalenguaje. Sin embargo, surge de un modo natural la cuestión de si para mayor seguridad (esto es, coherencia) *debe* mantenerse esta distinción, o si quizá puede debilitarse en algunos aspectos o incluso eliminarse totalmente; en otras palabras, podemos preguntarnos si y hasta qué punto un lenguaje L puede contener su propio metalenguaje. Puesto que el metalenguaje puede ser sintáctico o semántico, hemos de considerar dos clases de cuestiones: abordamos así los importantes temas de la *autorreferencia sintáctica* y *semántica*.

Gödel ha hecho ver que todo sistema lingüístico L (de los tipos clásicos familiares) que contenga la aritmética elemental contiene, en cierto modo, su propia sintaxis [1]. El método consiste esencialmente en establecer una correlación entre los números y las expresiones de L, de tal modo que todos los conceptos sintácticos definidos más arriba, en el capítulo III y *passim*, se transformen en conceptos aritméticos. Muy *grosso modo*, el método es el siguiente.

Naturalmente L ha de contener la aritmética o algún equivalente de ella. Supongamos que contiene la aritmética y, por tanto, los números '1', '2', etc., como constantes definidas o primitivas. Demos a los símbolos primitivos de L un orden arbitrario; podemos luego pensar que existe una correlación entre el número 1 y el primer símbolo, el 2 y el segundo, etc.; ahora, en vez de hablar dentro de M de los símbolos primitivos de L, podremos hablar de los números que les corresponden dentro de L mismo, y tenemos, asimismo, una determinada operación numérica correlativa del encadenamiento; cabe considerar, por lo tanto, que cada predicado sintáctico del capítulo III es ahora, en virtud de la correlación, un predicado aritmético. Empleando 'x', 'x'', etc., como variables de L, podemos definir

$$\text{`}x \text{ Acab } x'\text{'},$$

para significar, por ejemplo, que la expresión cuyo número de Gödel correspondiente es x acaba (en el sentido definido en (III, D)) la expresión cuyo número de Gödel es x'; y los otros conceptos pueden definirse de un modo análogo. Hacemos así de la sintaxis una rama de la aritmética, y no parece que esta correlación dé origen a una incoherencia en L.

Ocupémonos muy brevemente de una importante circunstancia que tiene lugar si L contiene su propia sintaxis aritmetizada del modo que acabamos de describir.

---

[1] Ver, especialmente, K. Gödel, «Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), pp. 173-98.

Admitimos que los correlativos aritméticos de *RSin1-RSin3*, *TG4* (III) y *TG13* (III), son demostrables en *L* (es conveniente que ocurra así cuando *L* ha de contener su sintaxis completa en el sentido tratado en el capítulo III). No necesitamos admitir la demostrabilidad de un correlativo aritmético de *RSin4*, puesto que el concepto de *demostración* para un sistema que contenga semejante regla requiere permitir una infinidad de premisas, como ya hemos observado, y no hemos definido aquí este sentido ampliado del concepto de demostración.

Enumeremos las diversas fórmulas de *L* de tal modo que podamos distinguir una primera fórmula, una segunda, etc. Sea f_0x el número de Gödel asignado a la x-ava fórmula de esta enumeración: f_0 es una función numérica monádica que tiene como argumentos números enteros y toma como valores números enteros, y que es definible dentro de *L*. (La auténtica definición presupone algunos tecnicismos aritméticos y no es necesario darla aquí.) Podemos definir otra función numérica a partir de 'f_0':

'g_0y' abrevia '(*qis cuexis* (*qis*$\frown$*id*$\frown$*y punto* f_0y))'.

'*qis*', '*cuexis*','$\frown$', etc., se usan aquí en su sentido aritmetizado. Dado un número entero y, g_0y es el número de Gödel de la fórmula

'(Ex) ($x = y$. ---x---)',

siendo '---x---' la fórmula y-ava en la enumeración y una función proposicional de la variable única 'x'. Todos los conceptos que esto implica pueden definirse en *L*, si admitimos que contiene una aritmética de alcance suficiente.

Supongamos ahora que, además de contener su propia sintaxis, *L* contiene su propio concepto semántico de verdad; supongamos, pues, que 'Vrd' sea un predicado numérico (definido o primitivo) de *L* que exprese el concepto de verdad en *L*; admitamos también que se introduce 'Vrd' de forma que sea un predicado adecuado en el sentido anteriormente definido. Consideremos ahora el enunciado.

(1) $\vdash (x)$ (---x--- . $\equiv$. $\sim$Vrd g_0x),

siendo '---x---' una función proposicional de la variable única 'x'; estas fórmulas son teoremas de *L*, dada la correlación de los conceptos numéricos y sintácticos, y porque admitimos que 'Vrd' se ha de introducir aritméticamente. La misma función proposicional

(2) '---x---'

aparece en la enumeración f_0: supongamos que tiene el número k_0, de suerte que f_0k_0 sea el número de Gödel de la fórmula (2). A partir de (1) tenemos, mediante una regla de cuantificación, que

(3) $\vdash$ ---k_0--- . $\equiv$. $\sim$Vrd g_0k_0.

Pero, empleando esta vez una regla de adecuación, tenemos también que

$\vdash$ **A** . $\equiv$. Vrd g_0k_0,

en donde **A** es la fórmula de *L* cuyo número de Gödel es g_0k_0; esta fórmula es, evidentemente,

'(Ex) ($x = k_0$. ---x---)'.

Luego tenemos que

(4) $\vdash$ (Ex) ($x = k_0$. ---x---) . $\equiv$. Vrd g_0k_0.

utilizando un equivalente aritmético de *TE8* (II), podemos deducir inmediatamente una contradicción a partir de (3) y (4).

Ya hemos sugerido antes que, dentro de los límites de lo que hasta ahora conocemos, un lenguaje L *sintácticamente* autorreferente no encierra peligros: si no existía ninguna razón previa para pensar que semejante L fuese incoherente, tampoco la habrá ahora para tener tal incoherencia por efecto de la autorreferencia sintáctica. Sin embargo, se desprende del razonamiento que acabamos de dar que la autorreferencia *semántica* es peligrosa y puede conducir a una antinomia: la proposición que (3) afirma ser un teorema, enuncia que determinada proposición

(5) '$---k_0---$'

se cumple si y sólo si no es verdadera; y la misma proposición (5) habla de sí misma, adscribiéndose en efecto la propiedad de la falsedad. Este tipo de proposiciones autorreferentes es peligroso y conduce directamente, en las debidas circunstancias, a una contradicción.

Hemos hecho ver, siguiendo a Tarski, que puede mostrarse la incoherencia de cualquier sistema lingüístico L (del tipo que estudiamos) si éste contiene su propio concepto adecuado de verdad, y que la demostración es esencialmente una adaptación del tipo de razonamiento que se usa para sacar consecuencias de la paradoja de Epiménides [1]. La autorreferencia de tipo semántico es en cierto modo excesiva y conduce a una contradicción; por lo tanto, algunas clases de autorreferencias son legítimas mientras que otras no son admisibles. En el momento actual, no ha sido aún aclarado en absoluto cómo se traza con precisión la línea divisoria entre las clases de autorreferencia admisibles e inadmisibles [2].

Nada de lo que se ha dicho aquí descarta la posibilidad de que pueda construirse un metalenguaje semántico de otra clase, en el cual no surjan las paradojas semánticas pero que quepa interpretar de forma que contenga de algún modo su propio concepto de verdad. De hecho, formularemos semejante metalenguaje en un capítulo posterior, (X, G), en relación con la semántica intraducente.

Observamos que, para que MS_D^L contenga de un modo coherente un concepto de verdad adecuado para L, ha de ser *esencialmente más rico* en modos de expresión y de deducción que L mismo [3]: ha de incluir, como ya hemos indicado, no sólo traducciones de los símbolos de L, sino también nombres descriptivo-estructurales de estos símbolos, junto con 'Den'; además, y por encima de estos nuevos elementos primitivos, MS_D^L ha de contener otros axiomas suplementarios, como hemos visto: *RSin1-RSin4* y *RDen1-RDen2* cumplen este fin y proporcionan así un alcance deductivo mayor que el de L solo.

Si L contiene la aritmética, podemos lograr el efecto de los nombres descriptivo-estructurales mediante el método de Gödel de la aritmetización dentro de L mismo. Pero no podríamos lograr también el efecto de 'Den' dentro de L y conservar la coherencia, porque si dispusiésemos

---

[1] Cf. A. Torski, *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 370-8.

[2] Cf. F. B. Fitch, *Symbolic Logic An Introduction*, pp. 217-25.

[3] Cf. A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff*, *passim*, y «Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik», *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, III (1936), pp. 1-8.

de esta relación o de un equivalente aritmético de ella, podríamos definir 'Vrd' y reconstruir así la paradoja de Epiménides. No obstante, sería posible desarrollar de un modo coherente la semántica de L añadiendo un elemento semántico primitivo a base del cual fuese definible un predicado aritmético 'Vrd'. Supongamos que se toma —como antes— una forma de denotación múltiple como elemento primitivo: *RDen1* y *RDen2* se transforman ahora en reglas aritméticas que caracterizan dicho elemento primitivo, y *RSin1*-*RSin4* se vuelven axiomas o teoremas aritméticos de L, siendo de este modo *RSin4* una regla de inducción infinita para números enteros. Evidentemente, el metalenguaje que resulta —al cual podríamos llamar MS_D^{L+}— es esencialmente más rico que L. La coherencia de MS_D^{L+} relativa a la de L puede demostrarse de un modo análogo, en lo esencial, al del § G. MS_D^{L+} es un metalenguaje particularmente sencillo para lenguajes objeto L que contengan la aritmética y posee por sí mismo cierto interés.

Si L es coherente no puede contener su propio concepto adecuado de verdad, ni tampoco MS_D^L o MS_D^{L+} pueden contener sus *propios* conceptos adecuados de verdad respectivos. Pero si se toma L como $MS_D^{L'}$, para un L' apropiado puede llegarse a un metalenguaje semántico basado en la denotación múltiple mediante una ampliación apropiada de los métodos descritos (puesto que en este caso L contiene *SRin4*, el concepto de 'Teor' debe ampliarse convenientemente o tomarse como elemento primitivo sintáctico adicional [1]). Este metalenguaje puede llamarse

$$MS_D^{MS_D^{L'}}.$$

Y podrá, pues, contener de un modo coherente un concepto de verdad adecuado, no para él mismo, sino para MS_D^L. L' podría a su vez tomarse como metalenguaje semántico de determinado L'', etcétera.

I. Indecidibilidad y verdad

Para terminar el estudio en este capítulo del concepto semántico de verdad, indicaremos muy someramente su relación con el importante concepto de *indecidibilidad*. Se dice que una proposición de L es una *proposición indecidible* de L si y sólo si ni ella ni su negación son teoremas de L.

'PrI a' abrevia '(Prop a . ~Teor a . ~Teor (*tilde a*))'.

Demostraremos a continuación muy brevemente la existencia de proposiciones indecidibles. Para esta demostración podemos emplear MS_D^{L+}, y suponer que este metalenguaje esté desarrollado siguiendo líneas análogas a las de MS_D^L; por ello los diversos teoremas de MS_D^L dados anteriormente reaparecerán ahora como teoremas aritméticos de MS_D^{L+} (las variables sintácticas 'a', etc., han de entenderse ahora como variables numéricas). Nos referiremos a estos teoremas aritméticos

[1] Sobre las propiedades sintácticas de 'Teor' en este sentido amplio, véase, por ejemplo, B. Rosser, «Gödel Theorems for Non-Constructive Logics», *The Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), pp. 129-37.

por su número, es decir, refiriéndonos en su lugar a los teoremas correspondientes de MS_D^L.

Dentro de $MS_D^L{}^+$ podemos demostrar, usando el razonamiento de Gödel, una fórmula estrechamente relacionada con la (1) del § H precedente, pero remplazando 'Vrd' por 'Teor':

(1) $\vdash (a)\ (\text{---}a\text{---} \ .\equiv.\ \sim\text{Teor}\ g_0a)$,

tomando 'g_0' como en el § H; a partir de ella, cuando '---a---' es la k_0-ava fórmula en la enumeración f_0, tenemos, igual que en el § H,

(2) $\vdash \text{---}k_0\text{---} \ .\equiv.\ \sim\text{Teor}\ g_0k_0$.

A partir de las Reglas de adecuación (§ C) y *TE8* (II), llegamos a

$\vdash \text{---}k_0\text{---} \ .\equiv.\ \text{Vrd}\ g_0k_0$.

Sea $j_0 = g_0k_0$. Entonces

(3) $\vdash \text{Vrd}\ j_0\ .\equiv.\ \sim\text{Teor}\ j_0$.

¡La proposición '---k_0---' tiene la extraordinaria propiedad de ser verdadera si y sólo si no es un teorema!

Podemos ver ahora que ni la proposición '---k_0---' ni su negación son teoremas de L. Sabemos por *TE6* que

(4) $\vdash \text{Prop}\ a\ .\equiv.\ \sim(\text{Vrd}\ a\ .\ \text{Vrd}\ (\textit{tilde}\ a))$,

entendiendo (*tilde a*) aritméticamente (si a es el número de Gödel de una fórmula, (*tilde a*) es el número de Gödel de la negación de dicha fórmula).

Por *TE5a* tenemos que

(5) $\vdash \text{Prop}\ a :\supset: \text{Teor}\ a\ .\supset.\ \text{Vrd}\ a$,

y también, análogamente, que

(6) $\vdash \text{Prop}\ a :\supset: \text{Teor}\ (\textit{tilde}\ a)\ .\supset.\ \text{Vrd}\ (\textit{tilde}\ a)$

Empleando (3) y (5) y recordando los teoremas de la lógica de funciones veritativas

$\vdash \sim\mathbf{A} \supset \mathbf{A}\ .\supset.\ \mathbf{A}$

y $\vdash \mathbf{A} \equiv \sim\mathbf{B}\ .\equiv.\ \sim\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$,

tenemos que

(7) $\vdash \text{Prop}\ j_0\ .\supset.\ \text{Vrd}\ j_0$,

luego, por (3) otra vez, que

$\vdash \text{Prop}\ j_0\ .\supset.\ \sim\text{Teor}\ j_0$

Análogamente por (4), (6) y (7)

$\vdash \text{Prop}\ j_0\ .\supset.\ \sim\text{Teor}\ (\textit{tilde}\ j_0)$.

Luego, combinando estos teoremas y abandonando la condición 'Prop j_0', que evidentemente se cumple,

(8) $\vdash \sim\text{Teor}\ j_0\ .\ \sim\text{Teor}\ (\textit{tilde}\ j_0)$

Toda proposición j_0 de este tipo es indecidible en L, porque ni ella ni su negación son teoremas de L.

Pero adviértase también que, debido a (7), j_0 es verdadera. Dentro de $MS_D^L{}^+$ (una formalización que contiene un concepto de verdad adecuado para L), las proposiciones indecidibles de L se vuelven verdaderas. Vemos, pues, que $MS_D^L{}^+$ proporciona un método sistemático de tratar las proposiciones indecidibles de L [1].

Obsérvese que esta demostración de la existencia de proposiciones indecidibles implica una referencia esencial al concepto de verdad, y,

[1] Este razonamiento es esencialmente el de TARSKI en *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 401-2.

por tanto, se da en el metalenguaje *semántico* $MS_D^L{}^+$. La existencia de semejantes proposiciones puede también demostrarse en L mismo si este lenguaje contiene su propia sintaxis en la hipótesis de que L sea coherente). Tenemos como teorema que

(9) $\quad \text{Coher } a_3\text{Fmla } a :\supset: \text{T}\sim\text{eor } j_0 \,.\, \sim\text{Teor } (\text{tilde } j_0)$

Su demostración implica algunos tecnicismos aritméticos de que no necesitamos ocuparnos ahora [1].

Debemos mencionar un importante corolario de (9): a saber, que si L es coherente, entonces el enunciado de L que dice que L es coherente no es a su vez un teorema de L. Sea m_0 el número de Gödel de este enunciado, esto es, el número de Gödel de 'Coher a_3Fmla a'. Entonces,

(10) $\quad \text{Coher } a_3\text{Fmla } a \,.\supset.\, \sim\text{Teor } m_0$

Pues supongamos que se tuviera

$$\text{Coher } a_3\text{Fmla } a \,.\, \text{Teor } m_0.$$

Teniendo en cuenta (9), debíamos saber que

$$\sim\text{Teor } j_0.$$

Pero recordando que j_0 es el número de Gödel de '$\sim j_0$', o sea de '---k_0---', sabemos, también por (9), que

$$\text{Teor } (m_0 \; dscd \; j_0),$$

tomando esta vez '*dscd*' en un sentido aritmético. Luego

$$\sim\text{Teor } j_0 \,.\, \text{Teor } (m_0 \; dscd \; j_0).$$

Pero entonces, al emplear el equivalente aritmético de *TG7b* (III), deberíamos tener que

$$\sim\text{Teor } j_0 \,.\, \text{Teor } j_0$$

lo cual es contradictorio. Luego (10) es válido.

Al tratar de la autorreferencia y la indecidibilidad hemos empleado una sintaxis aritmetizada. Existen también otros métodos que no usan la aritmética explícitamente, pero que no son esencialmente diferentes (por ejemplo, podríamos hacer ver, siguiendo a Quine, que M o L contienen proposiciones indecidibles si se interpretan de un modo apropiado '$\frown$' y los elementos primitivos descriptivo-estructurales: cf. (X, G)). Sin embargo, hemos preferido seguir el método original de Gödel, aun cuando el resumen que hemos dado de él ha tenido que ser vago e inexacto en varios respectos.

En síntesis; hemos visto en este capítulo que el concepto semántico de verdad es de capital importancia por cinco razones: (1) proporciona una explicación de antiquísimos conceptos filosóficos acerca de la verdad; (2) los metalenguajes que lo contienen permiten usar un método de amplia generalidad para demostrar la coherencia; (3) el concepto de verdad ofrece una base a partir de la cual pueden definirse otros importantes conceptos semánticos; (4) las consideraciones acerca del concepto de verdad nos capacitan para una comprensión más completa de la naturaleza de la autorreferencia semántica; y (5) los metalenguajes que contienen el concepto de verdad de L proporcionan un modo sistemático de tratar cualesquiera proposiciones indecidibles que pueda contener L.

[1] Véase GÖDEL, *op. cit.*, también B. ROSSER, «Extensions of Theorems of Gödel and Church», *The Journal of Symbolic Logic*, I (1936), pp. 87-91.

Teoría de conjuntos y teoría de tipos

La semántica desarrollada en el capítulo anterior es aplicable a cualquier lenguaje objeto de primer orden, L, que no contenga constantes individuales ni funcionales como elementos primitivos. La descripción sintáctica de la parte lógica —por así decirlo— de L ha sido formulada explícitamente en el capítulo III; pero la parte no lógica se ha dejado allí incompleta. Hemos especificado que, además de sus axiomas lógicos, L ha de contener algunos axiomas no lógicos o descriptivos que caractericen las propiedades o relaciones a las que se refieren las constantes predicado primitivas; también hemos especificado que ciertas traducciones de estos axiomas no lógicos deben reaparecer como axiomas del metalenguaje semántico MS_D^L. Consideremos ahora los axiomas no lógicos de determinado L algo más de cerca, dando un análisis sintáctico y semántico exacto de ellos.

Si tomamos para L el sistema (Z) de Hilbert-Bernays esbozado en (II, L), los axiomas no lógicos son los axiomas *Z1-Z7* tal cmo los hemos dado allí; si consideramos que L es un lenguaje que expresa ciertas partes de la física clásica —es decir, de la mecánica newtoniana—, entonces los axiomas no lógicos han de comprender en parte ciertas leyes básicas de esta ciencia; y si quisiéramos adoptar un L que fuese un sistema lingüístico para la teoría clásica de los números reales, podríamos tomar como axiomas no lógicos, por ejemplo, los estudiados por Huntington o Tarski [1]. Para estudiar la parte no lógica de L podríamos investigar con más detalle cualquiera de estos lenguajes; sin embargo, en lugar de uno de ellos estudiaremos en el presente capítulo dos importantes sistemas lingüísticos de primer orden, de mucho mayor alcance: serán éstos, (1) un sistema basado sobre la *teoría zermeliana de conjuntos*, y (2) un sistema basado sobre la *teoría de tipos simplificada de Russell*. Son tres las razones de su elección. En primer lugar, ambos son sistemas lingüísticos extraordinariamente importantes, que han despertado gran interés en el mundo científico, en el que son conocidos desde hace varios años: contienen ambos amplios sectores de la matemática y

[1] E. V. HUNTINGTON, «A Set of Postulates for Real Algebra, comprising Postulates for a One-Dimensional Continuum and for the Theory of Groups», *Transactions of the American Mathematical Society*, 6 (1905), pp. 17-41; y A. TARSKI, *Introduction to Logic* (Oxford University Press, New York, 1941), p. 214 y pp. 217-18.

—que se sepa— ninguno de ellos es incoherente. En segundo lugar, puede tomarse como metalenguaje semántico, para cualquiera de estos sistemas, un metalenguaje tal como MS_D^L, exactamente del mismo modo que para los sistemas más sencillos. Estos dos tipos de sistemas lingüísticos vienen teniendo una posición algo anómala con relación a los modos más usuales de formular la semántica [1]: los métodos empleados para los lenguajes objeto más sencillos no son aplicables a ellos sin ampliación previa y, por tanto, han de superarse varias dificultades antes de conseguir semántica alguna para este tipo de lenguajes.

La tercera razón para considerar estos lenguajes de gran alcance en lugar de otros más limitados es que la mayor parte de los lenguajes filosóficos o científicos bien desarrollados pueden considerarse como uno u otro de ellos, debidamente ampliado mediante la adición de ulteriores constantes primitivas no lógicas. La mayoría de tales lenguajes contienen bastantes matemáticas, luego parece natural considerar aquí sistemas de gran alcance que puedan proporcionar prácticamente todas las matemáticas necesarias; podríamos, naturalmente, considerar lenguajes más limitados que necesitasen una ampliación para determinados fines concretos; pero no ha de surgir ninguna complicación si nos ocupamos desde el principio de los sistemas lingüísticos de mayor alcance. [2]

Quizá sea necesario recomendar precaución con la expresión 'no lógico'. Algunos considerarían que la totalidad de la teoría zermeliana de conjuntos o de la teoría de tipos de Russell constituye una lógica; y desde este punto de vista los axiomas de estos lenguajes se llamarían también *lógicos* (véase más adelante el § G). Pero estas lógicas son tales en un sentido muy amplio del término; a lo largo de todo este libro entendemos 'lógica' en el sentido estricto tratado en el capítulo II, y por 'no lógico' entendemos 'no (lógico-en-el-sentido-clásico-elemental)'. Esta decisión acerca de la extensión de la palabra 'lógica' es, en parte, cuestión de convención; lo importante es sencillamente hacer resaltar el sentido sumamente estricto en que se usa tal palabra en todo el libro [3].

En el § A esbozaremos, en parte de un modo no formal, una *teoría axiomática* de conjuntos. Después, en el § B, se darán, dentro de un metalenguaje formalizado, *definiciones formales* del concepto de axioma de teoría de conjuntos y de otros conceptos sintácticos y semánticos

---

[1] Véanse, p. ej., A. TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 363-9 y «On Undecidable Statements in Enlarged Systems of Logic and the Concept of Truth», *The Journal of Symbolic Logic*, 4 (1939), pp. 105-12; J. KEMENY, «Type Theory vs. Set Theory», resumen en *The Journal of Symbolic Logic*, 15 (1950), p. 78; H. WANG, «Truth Definitions and Consistency Proofs», *Transactions of the American Mathematical Society*, 73 (1952), pp. 243-75. Véase también más adelante el capítulo VII, § E.

[2] Este capítulo sigue de cerca el trabajo del autor «On Truth and Multiple Denotation», *The Journal of Symbolic Logic*, 18 (1953), pp. 11-18. Véase también «What is a Rule of Language?», *Science, Language and Human Rights*, Papers of the American Philosophical Association, Eastern Division (University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1952), pp. 105-25. [La traducción española de este último trabajo está incluida en la ya citada *Antología Semántica*, pp. 218-40 *(T.)*.]

[3] Cf. especialmente R. CARNAP, *The Logical Syntax of Language*, *passim*.

relacionados con él. Daremos en el § C un esquema no formal de un sistema basado en la *teoría simplificada de tipos*, como preliminar a una *formulación más rigurosa* en el § D, y en el § E se esbozarán las propiedades semánticas básicas de este sistema. En el § F se hacen algunas observaciones acerca del procedimiento mediante el cual se dan *interpretaciones* a un sistema logístico. Finalmente, describimos en el § G, muy brevemente, los llamados *sistemas lingüísticos de orden superior*.

El lector a quien no interesen estos sistemas lingüísticos de gran alcance, o las diversas teorías semánticas que vamos a tratar en el próximo capítulo, puede pasar directamente al capítulo VIII, que trata de la semántica intraducente. Este capítulo y el siguiente son ligeramente más difíciles que los que siguen, y quizá también de menor interés filosófico.

A. Sistema S de Zermelo-Skolem

La teoría de conjuntos que hemos elegido es, en lo esencial, la forma de Church de la teoría de Zermelo-Fraenkel-Skolem [1]. Existen también otros tipos de teoría de conjuntos [2]: en cada tipo se trata de dar un análisis implícito del concepto de *conjunto*, uno de los fundamentales de la matemática moderna: los diferentes tipos de teorías de conjuntos caracterizan este concepto de diferentes modos, y quizá ninguno sea todavía plenamente satisfactorio; al escoger la teoría de Zermelo-Fraenkel-Skolem no pretendemos que sea ésta la más satisfactoria. No presentaremos la teoría con mucho detalle, pues su estudio corresponde en rigor a las matemáticas: trataremos únicamente de sus fundamentos, los cuales, sin embargo, se esbozarán con cierto cuidado [3].

El sistema formalizado se llamará *S*. *S* es un caso particular de *L*, por lo cual la lógica básica que necesitamos es simplemente la de *L* con inclusión de la identidad. La única constante predicado primitiva no lógica se simboliza por 'ε'. Las fórmulas atómicas son de la forma

(1) '$\mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{y}$',

siendo $\mathfrak{x}$ e $\mathfrak{y}$ variables; podrían también escribirse

'$\varepsilon\mathfrak{x}\mathfrak{y}$'

[1] Véase E. Zermelo, «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I», *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 261-81, y Th. Skolem, «Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre», *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli* 1922 (Helsingfors, 1923), pp. 217-32.

[2] Por ejemplo, las de Von Neumann, Bernays, Gödel. Véanse J. von Neumann, «Eine Axiomatisierung der Mengenlehre», *Journal für die reine und die angewandte Mathematik*, 154, (1925), pp. 219-40 (y *Berichtigung, ibid.*, 55 (1926), p. 128) y «Die Axiomatisierung der Mengenlehre», *Mathematische Zeitschrift*, 27 (1928), pp. 669-752; P. Bernays, «A System of Axiomatic Set Theory», *The Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), pp. 65-77; 6 (1941), pp. 1-17; 7 (1942), pp. 65-89 y 133-45; 8 (1943), pp. 89-106; 13 (1948), pp. 65-79 y 19 (1954), pp. 81-96; K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (Princeton University Press, Princeton, 1940). Cf. también el sistema de la *Mathematical Logic* de Quine, edición revisada.

[3] Véase una útil exposición del tema en A. Fraenkel, *Abstract Set Theory* (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1953).

para conformarlas con la notación del capítulo II (siendo 'ε' una constante predicado monádica), pero (1) es más usual. *S* no contiene constantes individuales ni funcionales. (Por razones de conveniencia continuaremos haciendo uso de '*x*', '*y*', '*z*', '*w*' y '*u*' como variables del lenguaje objeto en vez de sólo '*x*', '*x'*', '*x''*', etc.) Debe considerarse que las variables abarcan un dominio fundamental de *conjuntos;* 'ε' simboliza una relación llamada *pertenencia:* una fórmula tal como '$x \varepsilon y$' debe leerse 'el conjunto *x pertenece al* conjunto *y*' (o bien, 'el conjunto *x es un miembro* del conjunto *y*').

Los axiomas no lógicos de *S* proporcionan un modo de caracterizar la relación ε de pertenencia a un conjunto. La idea básica que aportan estos axiomas es, muy someramente, la siguiente: admitimos primero la existencia de dos conjuntos por lo menos, un conjunto *nulo* (*S2*, más abajo) y un conjunto *infinito* (*S7*); admitimos después que, dado uno o varios conjuntos determinados, existe otro conjunto (que tiene una propiedad dada), el cual de un modo u otro depende del conjunto o de los conjuntos dados. Por ejemplo, *S3* estipulará que dados unos conjuntos cualesquiera *x* e *y* existe un conjunto cuyos únicos miembros son estos conjuntos: así, dado el conjunto nulo y el conjunto infinito, existe según *S3* un conjunto del cual son éstos los únicos miembros. De un modo análogo, los axiomas estipulados por *S4*, *S5*, *S6*, *S7*, *S8*, *S9* y *S10* afirman la existencia de ciertos conjuntos en el supuesto de que se disponga ya de otros. De este modo, a partir de los conjuntos establecidos por *S2* y *S7*, creamos nuevos conjuntos, conjuntos de conjuntos, etc., según van siendo necesarios.

Las reglas siguientes nos proporcionan los axiomas no lógicos de *S*. La primera estipula el *Axioma de extensionalidad*, según el cual dados dos conjuntos *x* e *y* en los cuales cada miembro de *x* es un miembro de *y*, y viceversa, *x* e *y* son idénticos.

S1. $\vdash (x)(y)((z)(z \varepsilon x . \equiv . z \varepsilon y) . \supset . x = y)$.

La regla siguiente establece el *Axioma de existencia del conjunto nulo.* Este axioma enuncia que existe al menos un conjunto que no tiene ningún miembro.

S2. $\vdash (\mathrm{E}x)(y) \sim y \varepsilon x$.

La tercera regla estipula el *Axioma de emparejamiento*, según el cual, dados dos conjuntos cualesquiera *x* e *y*, existe un conjunto *z* cuyos miembros son, o bien *x*, o bien *y*.

S3. $\vdash (x)(y)(\mathrm{E}z)(w)(w \varepsilon z :\equiv : w = x \ .\mathrm{v}. \ w = y)$.

(Adviértase que cada una de estas reglas estipula que una proposición concreta de *S* es un axioma; todas las reglas lógicas enunciadas en el capítulo II, que hemos presupuesto, estipulan que infinitas fórmulas son axiomas; y algunas reglas no lógicas que daremos después estipulan también una infinidad de fórmulas. Se podría enunciar, por ejemplo, *S2* de un modo más general a fin de que estipulase una infinidad de axiomas; *S2* se podría leer:

$$\vdash (\mathrm{E}\mathbf{x})(\mathbf{y}) \sim \mathbf{y} \varepsilon \mathbf{x},$$

siendo **x** e **y** variables distintas de *S:* para cada elección diferente de las

variables tendríamos aquí un axioma distinto. Pero esto no es necesario, porque cada proposición de la forma

'(Ex)(y)~y ε x',

para x e y distintas, se sigue de *S2* por las reglas de cuantificación; por ello hemos enunciado esta regla a partir de variables escogidas en concreto.)

El cuarto axioma que se requiere es el *Axioma de las sumas*, dado por la regla siguiente:

S4. $\vdash (x)\,(Ey)\,(z)\,(z \in y \;.\equiv.\; (Ew)\,(z \in w \;.\; w \in x))$.

Dado cualquier conjunto x, existe al menos un conjunto y cuyos miembros son precisamente los miembros de los miembros de x: este conjunto y es la *suma* del conjunto de conjuntos x.

El *Axioma de potencia* establece que, dado cualquier conjunto x, existe un conjunto y cuyos miembros son precisamente los *subconjuntos* de x. Puede definirse

'x ⊂ y' como '(z) (z ε x . ⊃ . z ε y), siendo x e y variables cualesquiera y z cualquier variable distinta de x e y.

Cabe decir, pues, que un conjunto x es un subconjunto de un conjunto y si y sólo si para todo conjunto z, si z es un miembro de x entonces z es un miembro de y. La regla siguiente da el Axioma de potencia.

S5. $\vdash (x)\,(Ey)\,(z)\,(z \in y \;.\equiv.\; z \subset x)$.

Obsérvese que, de estas cinco reglas, sólo *S2* estipula un axioma plenamente existencial; *S3*, *S4* y *S5* establecen axiomas de tipo existencial *condicionado*: enuncian que, dado tal y tal conjunto (o tales conjuntos), existe un conjunto dependiente de él (o de ellos) del modo descrito.

Necesitamos dos axiomas específicos más. El primero, el *Axioma de elección*, es también un enunciado existencial condicionado. Afirma que, dado cualquier conjunto x no nulo de conjuntos no nulos en el cual no haya dos miembros que tengan un conjunto en común, existe un conjunto que tiene un conjunto en común, y sólo uno, con cada miembro de x.

S6. $\vdash (x)\,((Ey)\,y \in x \;.\; (y)\,(y \in x \;.\supset.\; (Ez)z \in y) \;.\; \sim(Ey)\,(Ez)\,(y \in x \;.\; z \in x \;.\; \sim y = z \;.\; (Ew)\,(w \in y \;.\; w \in z)) :\supset: (Ey)\,(z)\,(z \in x \;.\supset.\; (Ew)\,(u)\,((u \in z \;.\; u \in y) \;.\equiv.\; u = w)))$.

El *Axioma de infinitud* es plenamente existencial, y afirma que existe al menos un conjunto x que tiene como miembro el conjunto nulo y tal que si un conjunto y es un miembro de x, entonces cualquier conjunto cuyo único miembro sea y es también un miembro de x.

S7. $\vdash (Ex)\,((y)\,(\sim(Ez)z \in y \;.\supset.\; y \in x) \;.\; (y)\,(y \in x \;.\supset.\; (z)\,((w)\,(w \in z \;.\; .\equiv.\; w = y) \;.\supset.\; z \in x)))$.

Además de estas siete reglas necesitamos otras tres de carácter algo distinto: cada una de ellas estipula una infinidad de axiomas.

La primera regla es la *Regla de formación de subconjuntos* (*Aussonderungsaxiom*).

S8. $\vdash (x)\,(Ey)\,(z)\,(z \in y \;.\equiv.\; (z \in x \;.\; \mathbf{A}))$, siendo A cualquier fórmula de S que no contenga ni 'x' ni 'y' como variables libres.

Dada cualquier función proposicional A de este tipo, la regla establece como axioma que, dado cualquier conjunto x, existe un conjunto y

cuyos miembros son precisamente aquellos miembros de x para los cuales se realiza **A**.

La *Regla de substitución* (*Ersetzungssaxiom*), que se requiere para ciertas partes de la teoría transfinita de números, enuncia que: para cualquier conjunto de conjuntos x, y para cualquier relación definible tal que para cada conjunto y que sea miembro de x exista un conjunto (y sólo uno) para el cual y soporte esta relación, existe un conjunto z cuyos miembros son precisamente los objetos para los cuales los miembros de x soportan dicha relación.

S9. $\vdash (x)((y)(y \in x . \supset . (Ez)(w)(\mathbf{A} . \equiv . w = z)) . \supset . (Ez)(w)(w \in z . \equiv . (Ey)(y \in x . \mathbf{A})))$, siendo **A** una fórmula que no contenga ni 'x' ni 'z' como variables libres.

Finalmente, la *Regla de fundación* o *consolidación* (*Axiom der Fundierung*) restringe de hecho el número de conjuntos a aquéllos que pueden obtenerse mediante un número finito de etapas. Establece, digamos, que, dada una propiedad (definible) poseída por al menos un conjunto, existe al menos un conjunto x que tiene dicha propiedad, pero tal que ningún miembro de x la tiene. En rigor esta regla no es necesaria, pero facilita algo el desarrollo deductivo del sistema.

S10. $\vdash (Ex)\ \mathbf{A} . \supset . (Ex)(\mathbf{A} . \sim(Ey)(y \in x . \mathbf{B}))$, siendo **A** una fórmula que no contenga 'y' como variable libre y siendo **B** diferente de **A** sólo por contener apariciones libres de 'y' allí y sólo allí donde haya apariciones libres de 'x' en **A**.

Los axiomas lógicos son *R1-R8* y *Abst* y las reglas de deducción *MP* y *Gen*. Si se quiere se puede prescindir de introducir la identidad como elemento primitivo, pues puede definirse así:

'$\mathbf{x} = \mathbf{y}$' abrevia '$(\mathbf{z})(\mathbf{z} \in \mathbf{x} . \equiv . \mathbf{z} \in \mathbf{y})$', en donde **x** e **y** son variables cualesquiera y **z** cualquier variable distinta de **x** e **y**.

R7 es, pues, inmediatamente demostrable. En lugar de *S1* admitiríamos ahora que

$$\vdash (x)(y)(z)(x = y :\supset: x \in z . \supset . y \in z).$$

Entonces *R8* es igualmente demostrable.

También puede simplificarse *S* más en otros aspectos, si se quiere [1].

Si fuésemos a desarrollar detalladamente las consecuencias de *S1-S10* veríamos que todos los conceptos básicos de la matemática moderna están en cierto sentido contenidos implícitamente en *S*: no sólo es definible cada uno de estos conceptos, sino que también los teoremas fundamentales que a ellos se refieren son demostrables dentro de *S*. Para ver esto explícitamente, tendríamos que construir primero la aritmética elemental, seguir con la teoría de los números racionales, luego con los reales, reales con signo y complejos, demostrando los teoremas básicos de cada uno de estos campos. Después podríamos seguir con la topología, la geometría, el álgebra moderna, etc., mostrando cada vez cómo cada uno de estos campos de la teoría matemática puede acomodarse efectivamente dentro de *S*.

---

[1] Véanse, p. ej., W. ACKERMANN, «Mengentheoretische Begründung der Logik», *Mathematische Annalen*, 115 (1937-8), pp. 1-22, y H. WANG, «On Zermelo's and von Neumann's Axioms for Set Theory», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 35 (1949), pp. 150-55.

Si quisiéramos emplear S para otros fines que el de desarrollar la matemática, añadiríamos a S predicados primitivos no lógicos adecuados al tema científico filosófico tratado; añadiríamos después a las reglas no lógicas de S otras reglas igualmente no lógicas que caracterizasen estos nuevos elementos primitivos; la teoría resultante sería la teoría zermeliana de conjuntos aplicada al campo científico o filosófico concreto escogido. Hasta la fecha se ha trabajado muy poco en aplicar esta teoría a dichos campos.

B. Definición de 'Axioma de S' dentro de MS^s_D

Reflejemos ahora el contenido de la sección anterior en un metalenguaje formalizado. Tomando S como L, podemos especializar MS^L_D a fin de que proporcione una semántica a S: en este caso hablaremos de MS^s_D, el MS^L_D específico que toma S como lenguaje objeto.

S contiene sólo una constante predicado primitiva: 'ε'. En MS^s_D emplearemos '*ep*' como nombre descriptivo-estructural de este símbolo. Usamos '*ep*' en lugar de '*pe*', pues sugiere 'ε' con más claridad. Asimismo, escribimos

'$(qis \frown ep \frown qis \frown ac)$',

etcétera, en vez de

'$(ep \frown qis \frown qis \frown ac)$'.

Teniendo presente este ligero cambio, presuponemos toda la parte sintáctica de MS^s_D, desarrollada igual que en el capítulo III, sin más que leves alteraciones. Pero debemos aportar ahora una definición de ***axioma no lógico*** (o, como puede también decirse, *axioma de teoría de conjuntos)*; y podemos darla como sigue.

Para cada una de las reglas *S1-S10* dadas más arriba tenemos aquí una definición correspondiente.

Una expresión a de MS^s_D es un Axioma de extensionalidad de S si y sólo si tiene la forma apropiada de un axioma estipulado por *S1*.

'AsExt a' abrevia '$a = (qis\ cu\ qis \frown ac\ cu\ (qis \frown ac \frown ac\ cu\ (qis \frown ac \frown ac \frown ep \frown qis$ *triguión* $qis \frown ac \frown ac \frown ep \frown qis \frown ac)$ *dscd* $qis \frown id \frown qis \frown ac))$'.

La correspondencia con *S1* parece obvia. (Obsérvese que usamos aquí '$(qis \frown ac)$' como descripción estructural de 'y', '$(qis \frown ac \frown ac)$' como descripción estructural de 'z', etc., porque el uso de 'y', 'z', etc., en la sección anterior era *sensu stricto* ilícito.)

De un modo parecido pueden definirse los siguientes conceptos:

'AxCnjtoNulo a' correspondiente a *S2*,
'AxPar a' correspondiente a *S3*,
'AxSum a' correspondiente a *S4*,
'AxPot a' correspondiente a *S5*,
'AxElecc a' correspondiente a *S6*,

y

'AxInf a' correspondiente a *S7*.

En el caso de la regla *S8*, la definición formalizada es sólo ligeramente más complicada: se requiere una cláusula adicional en el definiens. Podemos establecer que

'AxFormSbcnjtos *a*' abrevia '(E*b*)(Fmla *b* . ~*qis* VLb *b* . ~(*qis*∧*ac*) VLb *b* . *a* = (*qis cu qis*∧*ac cuexis qis*∧*ac*∧*ac cu* (*qis*∧*ac*∧*ac*∧*ep*∧*qis*∧*ac triguión* (*qis*∧*ac*∧*ac*∧*ep*∧*qis punto b*))))'.

Correspondiendo a *S9*,

'AxSust *a*' abrevia '(E*b*)(Fmla *b* . ~*qis* VLb *b* . ~(*qis*∧*ac*∧*ac*) VLb *b* . *a* = (*qis cu* (*qis*∧*ac cu* (*qis*∧*ac*∧*ep*∧*qis dscd qis*∧*ac*∧*ac cuexis qis*∧*ac*∧*ac*∧*ac cu* (*b triguión qis*∧*ac*∧*ac*∧*ac*∧*id*∧*qis*∧*ac*∧*ac*)) *dscd qis*∧*ac*∧*ac cuexis qis*∧*ac*∧*ac*∧*ac cu* (*qis*∧*ac*∧*ac*∧*ac*∧*ep*∧*qis*∧*ac*∧*ac triguión qis*∧*ac cuexis* (*qis*∧*ac*∧*ep*∧*qis punto b*)))))'.

Igualmente, correspondiendo a *S10*, el «Axiom der Fundierung»,

'AxFund *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(Fmla *b* . *c* $\mathrm{SLb}^{(qis\wedge ac)}_{qis}$ *b* . ~(*qis*∧*ac*) VLb *b* . *a* = (*qis cuexis b dscd qis cuexis* (*b punto tilde qis*∧*ac cuexis* (*qis*∧*ac*∧*ep*∧*qis punto c*))))'.

Una expresión de *S* es un *axioma de conjuntos* si está estipulada por una de las reglas *S1-S10*:

'AxCnjtos *a*' abrevia '(AxExt *a* . v . AxCnjtoNulo *a* . v . AxPar *a* . v . AxSum *a* . v . AxPot *a* . v . AxElecc *a* . v . AxInf *a* . v . AxFormSbcnjtos *a* . v . AxSust *a* . v . AxFund *a*)'.

En rigor tendríamos que escribir 'AxCnjtos$_S$ *a*', porque el concepto definido es relativo al sistema lingüístico *S*. Pero semejante observación se podría aplicar igual a todos los predicados relativizados con respecto a *S* que hemos introducido o vamos a introducir, ya sean sintácticos o semánticos; no es, pues, necesario introducir el subíndice '*S*', pero se ha de tener presente que el concepto aquí definido es el de *axioma de conjuntos de S*. Esta misma observación es aplicable a todo el resto.

La definición de lo que se entiende por *teorema de S* puede lograrse mediante ingredientes enmarcados, como en (III, F), y 'Teor *a*' expresará que *a* es un teorema de *S*.

Con estos ligeros reajustes y definiciones suplementarios, los diversos conceptos semánticos arriba definidos—entre ellos un concepto de verdad—son ahora definibles en MS^s_D de modo esencialmente igual que en los capítulos IV y V. Dentro de MS^s_D puede darse una demostración de la coherencia de *S*, así como de la coherencia de MS^s_D relativa a la del lenguaje conjunto compuesto por *S* y *M* formulado como lenguaje sintáctico de *S*.

C. Teoría de tipos

Especializándolo de un modo ligeramente distinto, MS^L_D puede también tomarse como metalenguaje semántico para un lenguaje objeto basado sobre la teoría simplificada de tipos de Russell [1]. En este

[1] B. Russell, «Mathematical Logic as Based on the Theory of Types», *American Journal of Mathematics*, 30 (1908), pp. 222-62; A. N. Whitehead y B. Russell, *Principia Mathematica*; F. P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics*, pp. 1-61; y L. Chwistek, «Antynomje logiki formalnej», *Przeglad Filozoficzny*, 24 (1921), pp. 164-71. La formulación de la teoría simplificada de los tipos en este capítulo es esencialmente la de Tarski. Véase *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 364-6.

caso llamaremos MS_D^T al metalenguaje y T al lenguaje objeto. Han de hacerse algunos ligeros cambios más en el contenido de los capítulos III-V. En este parágrafo esbozamos T someramente, como preliminar a una formulación más rigurosa posterior.

La idea directriz de la teoría de tipos es la división de las variables (o de las entidades que abarcan) en *tipos* o *niveles*. Debe considerarse que las variables de cada tipo abarcan entidades de cierta índole; las variables del tipo primero o más bajo abarcan determinada totalidad de objetos; las del segundo tipo abarcan entonces *clases* de estos objetos; las variables del tercer tipo abarcan *clases de clases* de estos objetos, etc. (No es necesario especificar aquí con exactitud las entidades tomadas como objetos fundamentales; pero una vez que se ha hecho esto, sus clases, clases de clases, etc., quedan determinadas.) Las variables de cualquier tipo abarcan sólo entidades de este tipo y no se admiten variables que abarquen *todas* las entidades consideradas. El estudio de las variables es más complicado con T que con S debido a esta distinción de tipos; pero todavía puede considerarse T como un lenguaje de primer orden, aunque con una infinidad de clases diferentes de variables que abarcan una infinidad de clases diferentes de objetos. Los individuos de T comprenden los objetos fundamentales elegidos, así como clases de ellos, clases de clases, etc. (véase, más adelante, el § G).

Algunos lógicos piensan que la distinción de tipos es hasta cierto punto natural y corresponde más o menos aproximadamente a la intuición; otros la encuentran algo *ad hoc* y embarazosa. Sea como fuere, la teoría de tipos ha llegado a aceptarse como uno de los métodos más importantes de proporcionar una base lógica a la matemática y a la ciencia natural.

El objeto a que se encaminó la primera formación de esta teoría era encontrar un método de evitar la paradoja y la contradicción: sin la distinción de tipos, u otro procedimiento equivalente (como el que hemos dado antes para S), se puede siempre llegar a una contradicción. Supongamos que definimos inocentemente una clase de clases dada, K, como la clase de precisamente aquellas clases *que no son miembros de sí mismas;* al considerar si la misma K es un miembro de sí misma, incurrimos en contradicción: en efecto, supongamos que K es miembro de sí misma; entonces es una de las clases que no son miembros de sí mismas, luego *no* es miembro de sí misma. Esta es, en términos generales, la famosa paradoja de Russell. Sobre la base de la teoría de tipos, se evita esta paradoja exigiendo que no tenga significado decir de clase alguna que es o no miembro de una clase del mismo tipo. En todo sistema basado sobre la teoría de tipos existe, por tanto, una restricción importante de las fórmulas consideradas significativas.

En T, la única constante predicado primitiva no lógica es 'ε', y las fórmulas atómicas tienen la forma

$$\text{`}x \varepsilon y\text{'}$$

(siendo y una variable del tipo inmediato superior al de x), o la

$$\text{`}x = y\text{'}$$

en las que x e y son variables del mismo tipo. Estas definiciones se incorporan a la definición de 'fórmula de T' (véase, más adelante, el § D) y muchos tipos de expresiones (que podrían considerarse fórmulas) se rechazan como carentes de sentido. Adviértase que consideramos que 'ε' es una constante predicado *no lógica*, entendiendo 'lógico' en el sentido estricto antes descrito (véase, sin embargo, el § G) y que T no contiene constantes individuales ni funcionales.

En T escribiremos la m-ava variable de tipo n, así:

(1) $'x\overbrace{'''\ldots'}^{n \text{ veces}}\overbrace{''''\ldots'}^{m \text{ veces}}'$.

Los acentos indican el nivel (o grado) del tipo y los subíndices sirven únicamente para distinguir las variables entre sí [1]. Por razones de conveniencia, escribiremos así las expresiones análogas a (1):

(2) $'x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}'}$'.

'$\mathfrak{n}$' representa aquí una sarta de n acentos como primas o índices superiores y '$\mathfrak{m}$' una sarta de m acentos como subíndices; estas expresiones son expresiones metalingüísticas representativas de las variables de T. En ocasiones podemos escribir 'x_m^n' en lugar de (1) como variable del lenguaje objeto estipulada por (2): al simplificarse así la notación se facilitarán más adelante muchos enunciados.

La subestructura lógica básica es la del capítulo II: *R1-R8*, *Abst*, *MP* y *Gen* reaparecen aquí simplemente como reglas de T, pero con ciertas restricciones y cambios debidos a la distinción de tipos; *R5* debe leerse ahora como sigue:

$\vdash (x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}})$ **A** . $\supset$. **B**, si **B** difiere de **A** sólo por contener apariciones libres de cierta variable '$x_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{n}}$' dondequiera que haya apariciones libres de '$x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}}$' en **A**.

Las variables que aparecen en *R6*, *R7* y *Gen* pueden ser de cualquier tipo, pero las dos variables de *R8* han de ser del mismo tipo lógico. Los Axiomas de abstracción no pueden enunciarse aquí en una forma tan general como antes en (II, D); tenemos en su lugar la regla siguiente:

Abst. $\vdash x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}} \exists \mathbf{B}\, x_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{n}}$. $\equiv$. **A**, si '$x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}}$' es una variable distinta de '$x_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{n}}$' y que no aparece libre en **A**, y **B** difiere de **A** únicamente por contener apariciones libres de '$x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}}$' en 0 o más lugares en que haya apariciones libres de '$x_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{n}}$' en **A**.

Sólo son necesarias cuatro reglas *no lógicas*. La primera estipula los *Axiomas de extensionalidad*, uno para cada nivel de tipo.

T1 $\vdash (x_1^{n+1})(x_2^{n+1})((x_1^n)(x_1^n \varepsilon x_1^{n+1}) \equiv . x_1^n \varepsilon x_2^{n+1}) . \supset . x_1^{n+1} = x_2^{n+1})$.

Estos axiomas afirman que si dos clases del mismo tipo tienen los mismos miembros, entonces son idénticas.

Los *Axiomas de la existencia de clases* establecen que existe una clase—del tipo apropiado—correspondiente a toda función proposicio-

[1] Este uso se debe fundamentalmente a TARSKI. En los capítulos anteriores, para distinguir las variables se usaban primas o acentos; no debe confundirse tal empleo anterior de éstos con el que hacemos aquí para indicar el nivel del tipo.

nal que tenga por lo menos una variable. La regla que estipula estos axiomas es la siguiente:

T2. $\vdash (\mathrm{E}x_1^{n+1})(x_1^n)(x_1^n \in x_1^{n+1} .\equiv. \mathrm{A})$, si A es una fórmula que no contiene 'x_1^{n+1}' como variable libre.

También se necesitan formas apropiadas de un *Axioma de infinitud* y de los *Axiomas de elección*. Tanto *T1* como *T2* estipulan infinitos axiomas, uno para cada determinación específica de '**n**'; sin embargo, sólo necesitamos admitir un axioma de infinitud que establezca la existencia de al menos una clase infinita de clases de individuos: la existencia de clases infinitas de tipos superiores se sigue de ésta. El Axioma de infinitud afirma que existe al menos una clase no nula, x_1^3, de clases de individuos, cada miembro de la cual contiene una subclase propia que es también un miembro de x_1^3. Sea

'$x_k^{n+1} \subset x_m^{n+1}$' la abreviatura de '$(x_q^n)(x_q^n \varepsilon x_k^{n+1} .\supset. x_q^n \in x_m^{n+1})$'.

(Decir que una clase x_k^{n+1} es una *subclase* de una clase x_m^{n+1}, es decir que todo miembro de x_k^{n+1} es un miembro de x_m^{n+1}.) El Axioma de infinitud viene estipulado, pues, por la regla siguiente:

T3. $\vdash (\mathrm{E}x_1^3)((\mathrm{E}x_1^2)x_1^2 \in x_1^3 . (x_1^2)(x_1^2 \in x_1^3 . \supset . (\mathrm{E}x_2^2)(x_2^2 \in x_1^3 . x_2^2 \subset x_1^2 . \sim x_1^2 \subset x_2^2)))$.

Finalmente, los axiomas de elección se admiten en la forma de los *Axiomas multiplicadores* de Russell: éstos nos dicen que dada cualquier clase no nula, x_1^{n+2}, de clases mutuamente excluyentes (de tipo $n + 1$) existe al menos una clase que contiene un miembro y sólo uno en común con cada miembro no nulo de x_1^{n+2}.

T4. $\vdash (x_1^{n+2})((\mathrm{E}x_1^{n+1})x_1^{n+1} \in x_1^{n+2} . \sim(\mathrm{E}x_1^{n+1})(\mathrm{E}x_2^{n+1})(x_1^{n+1} \in x_1^{n+2} . x_2^{n+1} \in x_1^{n+2} . \sim x_1^{n+1} = x_2^{n+1} . (\mathrm{E}x_1^n)(x_1^n \in x_1^{n+1} . x_1^n \in x_2^{n+1})) : \supset : (\mathrm{E}x_1^{n+1})(x_2^{n+1})(x_2^{n+1} \in x_1^{n+2} . (\mathrm{E}x_2^n)x_2^n \in x_2^{n+1} : \supset : (\mathrm{E}x_1^n)(x_2^n)(x_2^n \in x_2^{n+1} . x_2^n \in x_1^{n+1} :\equiv: x_2^n = x_1^n)))$.

Aquí, igual que en *S*, puede prescindirse de la identidad como elemento primitivo, pues es definible del modo siguiente:

'$x_m^n = x_k^n$' abrevia '$(x_p^{n+1})(x_m^n \varepsilon x_p^{n+1} .\supset. x_k^n \varepsilon x_m^{n+1})$'.

E igualmente pueden abandonarse aquí *R7* y *R8*, demostrables usando la anterior definición; pero se conserva, sin embargo, *T1*.

Adviértase que *T* está formulado de tal modo que no contiene variables para relaciones ni funciones, sino sólo para clases, clases de clases, etc. No obstante, podemos manejar relaciones (y, por tanto, funciones) dentro de *T*, usando los métodos de Wiener y Kuratowski [1]. La idea directriz de estos métodos es considerar las relaciones como clases de *pares ordenados* de determinada especie. Supongamos que queremos lograr en *T* el efecto de una variable '*R*' para las relaciones diádicas entre individuos, y expresar que determinado individuo x_m^1 es soporte de la relación *R* para x_o^1. Formamos primero el par ordenado x_m^1 y x_o^1 como clase de dos clases, una de las cuales es la clase

[1] Véanse N. WIENER, «A Simplification in the Logic of Relations», *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 17 (1912-14), pp. 387-90, y C. KURATOWSKI, «Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles», *Fundamenta Mathematicae*, 2 (1921), pp. 161-77.

cuyo único miembro es x^1_m, y la otra clase cuyos únicos miembros son x^1_m y x^1_o; x^3_n es entonces un par ordenado de este tipo si

(3) $(x^2_1)(x^2_1 \in x^3_n : \equiv : (x^1_3)(x^1_3 \in x^2_1 \;.\equiv.\; x^1_3 = x^1_m) \;.\vee.\; (x^1_3)(x^1_3 \in x^2_1 : \equiv : x^1_3 = x^1_m \;.\vee.\; x^1_3 = x^1_o))$.

Podemos lograr el efecto de 'R' como variable empleando una variable 'x^4_n', de tipo cuarto. Decir que x^1_1 es soporte de R para x^1_2 es decir que

(4) $(x^3_1)((x^2_1)(x^2_1 \in x^3_1 : \equiv : (x^1_3)(x^1_3 \in x^2_1 \;.\equiv.\; x^1_3 = x^1_1) \;.\vee.\; (x^1_3)(x^1_3 \in x^2_1 : \equiv : x^1_3 = x^1_1 \;.\vee.\; x^1_3 = x^1_2)) \;.\supset.\; x^3_1 \in x^4_n)$.

Lo cual puede abreviarse de un modo conveniente así:

$$\text{`}\langle x^1_1, x^1_2\rangle \in x^4_n\text{'}.$$

Veamos cómo se tratan las relaciones de orden superior. *La terna ordenada* de individuos x^1_1, x^1_2 y x^1_3, por ejemplo, puede identificarse con el par de pares ordenado cuyo primer par ordenado esté formado por x^1_1 y x^1_2 y el segundo por x^1_2 y x^1_3; el efecto de una variable 'R' se logra, por tanto, para una relación triádica mediante una variable de tipo *sexto*. Abreviemos ahora (3) con 'x^3_n PO x^1_m, x^1_o': decir que existe la relación R entre x^1_1, x^1_2 y x^1_3 es, pues, decir que

$(x^5_1)((x^4_1)(x^4_1 \in x^5_1 : \equiv : (x^3_1)(x^3_1 \in x^4_1 : \equiv : x^3_1 \text{ PO } x^1_1, x^1_2) \;.\vee.\; (x^3_1 \in x^4_1 : \equiv : x^3_1 \text{ PO } x^1_1, x^1_2 \;.\vee.\; x^3_1 \text{ PO } x^1_2, x^1_3)) \;.\supset.\; x^5_1 \in x^6_n)$.

Que escrito de un modo abreviado será

$$\text{`}\langle x^1_1, x^1_2, x^1_3\rangle \in x^6_n\text{'}.$$

Y así sucesivamente para relaciones de grado aún mayor. Las relaciones entre objetos de tipo superior se tratan de modo análogo.

Todos los pares ordenados considerados han sido *homogéneos*, en el sentido de que los miembros del par son del mismo tipo lógico; pero pueden introducirse fácilmente parejas ordenadas *heterogéneas:* por ejemplo, supongamos que quisiéramos formar el par ordenado x^2_1 y x^1_1; podemos considerar que esto equivale al par ordenado formado por x^2_1 con la clase cuyo único miembro es x^1_1, y

$$\text{`}\langle x^2_1, x^1_1\rangle \in x^5_n\text{'}$$

puede abreviar

$(x^4_1)((x^3_1)(x^3_1 \in x^4_1 : \equiv : (x^2_2)(x^2_2 \in x^3_1 \;.\equiv.\; x^2_2 = x^2_1) \;.\vee.\; (x^2_2)(x^2_2 \in x^3_1 : \equiv : x^2_2 = x^2_1 \;.\vee.\; (x^1_2)(x^1_2 \in x^2_2 \;.\equiv.\; x^1_2 = x^1_1)))) \;.\supset.\; x^4_1 \in x^5_n)$'.

De una forma semejante podemos definir expresiones como

$$\text{`}\langle x^3_1, x^1_1\rangle \in x^6_n\text{'},$$
$$\text{`}\langle x^2_1, x^1_1, x^1_2\rangle \in x^7_n\text{'},$$

y así sucesivamente adecuando pares, ternas, etc., heterogéneas de creciente complejidad. (Existen, sin duda, otros métodos de manejar los pares, ternas, etc., ordenados, que no necesitamos considerar aquí.)

El lector hallará en *Principia Mathematica* el desarrollo deductivo de un sistema que es esencialmente el T. Como en el caso de S, podemos encuadrar en T la mayor parte de la teoría matemática moderna; y, sin embargo, los dos sistemas T y S no son equivalentes, pues se sabe que en ciertos aspectos el alcance de S es mayor que el de T [1].

También aquí, como en el caso de S, podemos añadir nuevos elementos primitivos no lógicos y axiomas que los caractericen, formalizando así ámbitos dados de la teoría científica o filosófica,

[1] Véase J. KEMENY, *op. cit.*

D. 'Axioma de T' dentro de MS_D^T

Precisaremos ahora el anterior—y tosco—esquema de *T*. Tomando *L* como *T*, especializamos MS_D^L de forma que proporcione una semántica para *T*, siendo MS_D^T el metalenguaje resultante.

Debido al tipo peculiar de variables de *T*, necesitamos en MS_D^T otra descripción estructural primitiva, '*subind*', que nombra el subíndice primitivo: '(*qis*⌢*ac*⌢*subind*)', por ejemplo, será la descripción estructural de la variable '*x*'', . '*ep*' será, como en MS_D^s, la descripción estructural de 'ε'. Tenemos así en MS_D^T que

'SP *a*' abrevia ahora '(*a* = *pi* . v . *a* = *pd* . v . *a* = *uve* . v . *a* .= *tilde* . v . *a* = *qis* . v . *a* = *ac* . v . *a* = *subind* . v . *a* = *id* . v . *a*= *epinv* . v . *a* = *ep*)'.

En la parte sintáctica de MS_D^T, la definición de 'Vbl *a*' ha de apartarse ligeramente de la dada en (III, D): aquí una variable es *qis* seguido de una sarta de acentos o índices superiores seguido de una sarta de subíndices. El concepto de *sarta de subíndices* es semejante al de sarta de acentos, y así

'SartaSubind *a*' puede abreviar '(*b*)(SP *b* . *b* Seg *a* : ⊃ : *b* = *subind*)'. Podemos, pues, definir el concepto de variable estableciendo que

'Vbl *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(SartaAc *b* . SartaSubind *c* . *a* = (*qis*⌢ *b*⌢*c*))'.

(Definiremos el concepto de variable de tal y cual nivel de tipo dentro de un momento.)

La definición de *fórmula atómica* de *T* ha de darse también de un modo ligeramente distinto de la de (III, D). Podemos decir que una expresión *a* es una fórmula atómica de *T* si y sólo si: (i) está compuesta por *qis* encadenado a una sarta de acentos *b* encadenada a una sarta de subíndices *c* encadenada a *ep*, después a *qis*, después a *b*, *después a ac* y finalmente a una sarta de subíndices *d*; o (ii) *a* tiene forma idéntica a *qis* seguido de *b*, ésta de *c*, seguida después por *id*, después por *qis*, después por *b* y finalmente por *d*.

'FmlaAt *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(E*d*)(SartaAc *b* . SartaSubind *c* . SartaSubind *d* : *a* = (*qis*⌢*b*⌢*c*⌢*ep*⌢*qis*⌢*b*⌢*ac*⌢*d*) . v . *a* = (*qis*⌢*b*⌢*c*⌢*id* ⌢*qis*⌢*b*⌢*d*))'.

Adviértase, en particular, la condición que se requiere para que las fórmulas atómicas *a* que contienen *ep* sean significativas: *a* debe componerse de una variable seguida de *ep* seguida de la variable del tipo inmediato superior.

La definición de 'Fmla' puede ahora darse (igual, en lo esencial, que en II D), por medio de ingredientes enmarcados; pero 'Abst' —que esta definición presupone— ha de definirse de un modo un poco distinto, porque las dos variables que implica tienen que ser del mismo tipo. En la definición de 'FmlaAt' que acabamos de dar, el *definiens* nos sugiere que podemos definir la idea de que dos variables *a* y *b* son del *mismo tipo* como sigue:

'*a* MisTp b' abrevia '(E*e*) (E*c*) (E*d*) (SartaAc *c* . SartaSubind *c* . SartaSubind *d* . *a* = (*qis*⌢*e*⌢*c*) . *b* = (*qis*⌢*e*⌢*d*))'.

Podemos, pues, definir

'*a* Abst *b*' como '(E*c*) (E*d*) (*c* MisTp *d* . *a* = (*c*⌢*epinv*⌢*b*⌢*d*))'.
La definición de 'Fmla' puede ahora darse de modo esencialmente igual que en (III, D).

Han de hacerse algunos ligeros cambios más en otras definiciones. En el *definiens* de la 'SLb1' en (III, E) hay que añadir como conyunción adicional la cláusula '*b* MisTp *c*' (las definiciones sucesivas que emplean 'SLB1' se corrigen por sí solas automáticamente). La definición rigurosa de 'Axioma de *T*' puede, pues, darse dentro de MS_D^T, y cualquier leve cambio ulterior que sea necesario puede hacerse fácilmente.

E. Conceptos semánticos dentro de MS_D^T

Debido a la distinción de tipos, ha de alterarse ligeramente el contenido semántico de los capítulos IV-V.

Las reglas de MS_D^T son en lo esencial las mismas que antes, en (IV, D), salvo las Reglas de denotación, que requieren algunos ligeros cambios en su enunciado. Aquí la primera regla, *RDen1*, se lee

$\vdash (x_m^n)\ (a \text{ Den } x_m^n \ .\equiv. \ ---x_m^n---)$, en donde '$---x_m^n---$' es cualquier función proposicional de la variable única 'x_m^n' de la parte traducente de MS_D^T, y en lugar de '*a*' se pone la descripción estructural del abstracto '$x_m^n \ni ---x_m^n---$'.

También ha de cambiarse ligeramente la Regla restrictiva *RDen2*. Recordemos que esta regla enuncia que

$$\vdash a \text{ Den } x \ .\supset. \text{ ConsPred } a.$$

En lugar de '*x*' ponemos aquí 'x_m^n'. Pero también hemos de especificar en la conclusión que *a* es una constante predicado de tal y tal orden o tipo: diremos a *grosso modo* que un abstracto de la forma '$x_m^n \ni ---x_m^n---$' es del tipo $n+1$. Para definir esto formalmente definimos primero el concepto de *variable* de tipo *n* (el uso de variables numéricas se debe únicamente a la comodidad que permiten en la expresión, sustituyendo a las sartas de acentos y de subíndices); no podemos definir en general la idea de que una expresión *a* es una variable de tipo *n*, pero podemos definir lo que se entiende por variable del primer tipo, del segundo tipo, etcétera.

'Vbl′ *a*' o 'Vbl^1 *a*' abrevian '(E*b*) (SartaSubind *b* . *a* = (*qis*⌢*ac*⌢*b*))',
'Vbl″ *a*' o 'Vbl^2 *a*' abrevian '(E*b*) (SartaSubind *b* . *a* = (*qis*⌢*ac*⌢*ac*⌢*b*))',
y así sucesivamente. Si '**n**' representa cualquier sarta de acentos *fija*, es posible, en consecuencia, presuponer la definición de '**Vbl^n *a*'**; y podemos también, por tanto, definir lo que se entiende por constante predicado de tipo $n+1$ (en rigor, de tipo

$$(\underbrace{'''' \ldots '}_{n+1 \text{ veces}}) .$$

'ConsPred^{n+1} *a*' abrevia '(E*b*) (E*c*) (Vbl^n *b* .FuncProp Una *c*,*b* *a* = (*b*⌢*epinv*⌢*c*))'.
Teniendo en cuenta estas definiciones, podemos enunciar *DenR2* así:

$$\vdash a \text{ Den } x_m^n \ .\supset. \text{ ConsPred } ^{n+1} a.$$

El concepto de verdad en T no puede definirse como en el capítulo V, porque los conceptos de variable,de constante predicativa universal, etc., dan ahora lugar a una infinidad de conceptos con ellos relacionados (uno para cada tipo); así, en lugar de 'Univ *b*' tenemos ahora infinitos conceptos: 'Univ'' b', 'Univ''' b', etc. (no tenemos 'Univ''). Las diversas variables traducentes deben también llevar ahora acentos o subíndices para indicar el tipo: 'Vrd_1', definido por (1) en (V, A), da lugar a una infinidad de predicados de verdad, 'Vrd_1'', 'Vrd_1'''', etc. 'Vrd_1'' *a*', por ejemplo, puede introducirse como abreviatura de

'(PropUnivAt *a* . (E*b*) (Univ''' *b* . *b* S_{pd}^{epinv} *a*))'.

Pero (II) de (V, A) presupone un *único* concepto Vrd_1, y no una infinidad de ellos, razón por la cual no puede admitirse aquí. Por motivos análogos, (III), (IV) y (V) de (V, B) no pueden expresarse sin alteración; pero cabe obtener definiciones de verdad adecuadas para T en MS_D^T de varios modos por el método que exponemos a continuación.

Podemos primero reinterpretar (III) de (V, B), es decir, la definición a base de formas normales prenexuadas. Recordamos de (II, G) que, dada cualquier proposición *a*, puede hallarse una proposición en forma normal prenexuada equivalente a *a* que contenga como primer cuantificador izquierdo un cuantificador universal. En T podemos también exigir que la variable comprendida en este cuantificador universal sea de determinado tipo, por ejemplo, de tipo 1. Si entendemos ahora 'FNP' de este modo, (III) de (V, B) da lugar a la siguiente definición.

'Vrd *a*' abrevia '(Prop *a* . (E*b*) (E*c*) (*b* FNP *a* . Univ'' *c* . *c* S_{pd}^{epinv} *b*))'. Podemos demostrar la adecuación de esta definición de verdad de un modo esencialmente igual al de (V, C).

De un modo parecido pueden darse definiciones análogas a (IV) y (V) de (V, B): supongamos que se escoge un tipo por adelantado, digamos el enésimo; entonces, usando fundamentalmente (IV), podemos definir

'Vrd *a*' como '(Prop *a* . (E*b*) (Vbl$\overbrace{''''\cdots''}^{n \text{ veces}}$ *b* . Univ$\overbrace{''''\cdots'''}^{n+1 \text{ veces}}$ (*b*$\frown$ *epinv*$\frown$ (*a punto* *b*$\frown$*id*$\frown$*b*))))'.

De este modo obtenemos infinitas definiciones de verdad diferentes, una para cada *n*; puede demostrarse que cada una de ellas es adecuada. También pueden darse definiciones análogas sobre la base de (V) de (V, B) en vez de (IV).

En lo referente a conseguir un concepto de verdad adecuado para T, las definiciones anteriores muestran claramente que basta con una relación muy limitada de denotación múltiple. En realidad, podríamos considerar que '*a* Den $x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}}$' tiene significado sólo cuando $\mathfrak{n}$ es un acento *único*; entonces no haría falta admitir *RDen1* y *RDen2* más que para este $\mathfrak{n}$; la variable '*b*' de la definición última sería entonces del primer tipo. Hemos visto que sobre esta base se puede definir un concepto de verdad adecuado para T, y con él los otros conceptos semánticos fundamentales; sin embargo, para otros fines puede ser conveniente disponer de 'Den' en un sentido más amplio.

Puede demostrarse la coherencia de MS_D^T con relación a la de T y M juntos de un modo esencialmente análogo al de (V, G). (Luego también el

metalenguaje semántico para T basado en la limitada relación mencionada de denotación múltiple es coherente relativamente).

Obsérvese que en T y, por tanto, en su traducción dentro de MS_D^T, no es ya necesario considerar que los abstractos monádicos representan sólo clases *virtuales*, sino que pueden, si se quiere, representar auténticas clases como valores para variables. Si se adopta este punto de vista, los abstractos se vuelven *términos* y así pueden sustituir legítimamente a variables; deben hacerse entonces ligeros cambios en lo anterior: en particular, *T2*, que proporciona los Axiomas para la existencia de clases, es entonces demostrable.

F. Reinterpretación

Hasta ahora hemos admitido, al tratar de los diversos metalenguajes semánticos, que los valores de las variables traducentes son los mismos que los de las variables del lenguaje objeto L. Este modo de hablar es, naturalmente, algo equívoco: pues sugiere que L se da primeramente, y que después se construye el metalenguaje semántico. Lo que se pretende dar a entender es que L se da primero sin formalizar totalmente y que después se construye el metalenguaje semántico de forma que establezca la sintaxis y la semántica de L de un modo preciso; no se plantea, por tanto, la cuestión de cuál es anterior al otro; en rigor, L no existe mientras no se ha formulado de un modo preciso, pero tampoco existe un metalenguaje semántico que no sea relativo a un L dado.

Por regla general pueden darse diversas interpretaciones al mismo sistema logístico subyacente. Dada una interpretación de L, llamaremos *reinterpretación* al procedimiento de dar una interpretación diferente; la reinterpretación es simplemente una nueva interpretación; pero los dominios de valores para variables pueden diferir en dos interpretaciones y las constantes predicativas primitivas pueden denotar diferentes clases de objetos. El nuevo dominio puede ser una subclase del antiguo o una clase que comprenda a éste como subclase suya, puede tener su misma extensión, puede solaparse con él o pueden ambos ser disjuntos; los objetos que denotan las constantes predicado primitivas se determinan de acuerdo con estas circunstancias. Adviértase que los símbolos lógicos de L, '$\sim$', 'v', etc., permanecen fijos, pues su función en la nueva interpretación es la misma que en la anterior: su sentido, por así decirlo, no está sujeto a cambios. Naturalmente, podríamos querer asignar también a estos símbolos nuevos significados; pero esto supondría un tipo de reinterpretación más radical que el que ahora consideramos.

De las diversas interpretaciones que pueden darse a un sistema logístico, suele considerarse una como básica o *típica* (ya hemos apuntado tal cosa en I, B); las otras interpretaciones son, pues, en cierto modo atípicas. Los sistemas tales como S o T tienen unas interpretaciones atípicas particularmente importantes, en las cuales el dominio fundamental de objetos es la clase de los números naturales (o cualquier otro dominio numerable). (Véase (XIII, I).) Sin embargo, si hubiésemos

de formular S o T según la interpretación cuyo dominio son los números naturales, procederíamos exactamente igual que antes, en MS_D^S o MS_D^T; pero se entendería que las variables traducentes de estos metalenguajes abarcan el dominio de los números naturales.

El dar precisión al procedimiento de reinterpretación requeriría enriquecer considerablemente estos metalenguajes: en particular, habría que precisar lo que se entiende por *campo abarcado* por las variables. Hablando en términos muy generales y ajenos a toda formalización, podemos definir el campo abarcado por las variables de L como tal y cual clase o clase virtual de objetos; podemos llamar a esta clase 'ValVbl$_L$', la clase de los valores para las variables de L. En los metalenguajes anteriores hemos identificado ValVbl$_L$ con el campo abarcado por las variables traducentes; pero si la reinterpretación hubiese de describirse con precisión dentro de un metalenguaje, esta identificación no sería conveniente. En efecto, en la reinterpretación podríamos querer considerar también un nuevo campo de valores para variables, digamos ValVbl'$_L$, definido (de nuevo) como tal y cual clase o clase virtual de objetos: el metalenguaje semántico empleado contendría expresiones para varios tipos de objetos así como los medios de distinguirlos entre sí.

No es necesario que tratemos más extensamente de este tipo de metalenguaje, porque en lo esencial no es más que una forma ampliada de MS_D^L; pero para ciertos fines filosóficos semejante metalenguaje ampliado podría ser de utilidad. (Comentamos algo más la reinterpretación, acerca de la semántica intraducente, en (XIII, H-I).)

G. Sistemas lingüísticos de orden finito

En los apartados anteriores hemos formulado T como un sistema lingüístico de primer orden: es decir, hemos tomado 'ε' como un elemento primitivo no lógico y hemos admitido que los individuos comprendían los objetos fundamentales (del tipo más bajo) *junto con* todas las clases de ellos, todas las clases de clases de ellos, y así sucesivamente. T era simplemente un caso particular de los lenguajes L del capítulo II, que no presuponía otra lógica básica que la de primer orden de este capítulo; T se formulaba como una teoría matemática de las clases, igual que S se formulaba como una teoría matemática de los conjuntos.

Con frecuencia, los sistemas de la índole de T se formulan, no como teorías matemáticas basadas sobre una lógica de primer orden, sino como lógicas de un tipo superior una de cuyas partes es la lógica de primer orden. Ocupémonos algo más detalladamente de este otro modo de formular T; no hemos de dar una formulación exacta, sino sólo unas cuantas observaciones toscas y aclaratorias.

'Lógica', como ya hemos observado varias veces, se usa en este libro sólo en su sentido (clásico) más elemental, que es quizá el sentido de la palabra utilizado con más frecuencia por los matemáticos. Algunos lógicos prefieren un sentido más amplio a fin de incluir en él, en parte o quizá en su totalidad, la teoría de las clases cuya base es la teoría de

tipos; en este sentido amplio, el 'ε' de la teoría de tipos se vuelve un elemento primitivo lógico, y la teoría que lo rige una teoría lógica. Si esta teoría se considera una lógica, es conveniente no emplear 'ε', sino escribir

$$'x_j^{n+1}(x_k^n)' \text{ o } 'x_j^{n+1}x_k^n'$$

en lugar de

$$'x_k^n \varepsilon x_j^{n+1}'.$$

En la explicación no formalizada de los lenguajes de primer orden del capítulo II, la palabra 'individuo' se daba por conocida: esta palabra se usaba allí en el sentido aproximado de 'ente de cierta totalidad de objetos no nula y claramente demarcada'. Llamemos de momento *individuos*$_1$ a los individuos comprendidos en este sentido. En la anterior formulación de T, los individuos$_1$ de T se toman como entes del tipo más bajo —juntamente— con todas las clases de ellos, todas las clases de estas clases, etc. (estas clases, clases de clases, etc., no son más que un caso especial de individuo$_1$). Llamemos ahora a los entes de T del *tipo más bajo, individuos*$_2$*;* aquí, en la formulación no formalizada de T como una lógica, además de entender 'individuo$_2$' en este sentido, hemos de saber lo que significa hablar de *clases* de tales individuos. Estas clases no han de considerarse como casos especiales de individuos$_1$, como se ha hecho en la formulación anterior de T, sino como entes de un género completamente distinto; lo mismo puede decirse de las clases de clases, etc. En la formulación lógica de T, el término 'clase' recibe un sentido previo, por así decirlo, en el metalenguaje no formalizado, mientras que en la formulación matemática no lo recibe: en esta última los axiomas caracterizan las clases como un tipo especial de individuo$_1$, y entonces entendemos por 'clase' aquello que los axiomas nos compelen a entender: la palabra 'clase', por así decirlo, tiene sentido únicamente con relación a los axiomas. Pero en la formulación de T como una lógica hemos de entender 'clase', 'clase de clases', etc., como representativas de tipos especiales de objetos: los sentidos aquí no son relativos a los axiomas, sino que se fijan por adelantado.

En lo sucesivo llamaremos T_ω a la formulación de T como una lógica.

Se deduce claramente de lo anterior que T y T_ω son semejantes en algunos rasgos fundamentales; la diferencia, sin embargo, no es puramente de terminología: T_ω es un sistema que se interpreta explícitamente como lógica de clases, y que, por tanto, no está sujeto a reinterpretación. No somos libres de darle algún otro nuevo significado a la relación de pertenencia, porque su sentido está ya fijado como relación lógica básica; tampoco tenemos mayor libertad para reinterpretar la conexión de pertenencia a clases de la que tenemos para reinterpretar '$\vee$' o '$\sim$'. Sin embargo, somos libres de reinterpretar el 'ε' de T del modo que queramos, siempre que tal interpretación se adapte a los axiomas, como ya hemos indicado.

Tanto en T como en T hemos presupuesto que la teoría de las relaciones se desarrollaba como rama especial de la teoría de las clases, usando los métodos de Wiener y Kuratowski: esto hacía posible una formulación de T muy sencilla. Con frecuencia es conveniente desarrollar T o T de un modo ligeramente más complejo, admitiendo

como valores para las variables relaciones junto con cuantificadores que las afecten. No hace falta admitir todos los tipos de variables de relación; si se quiere, además de todos los tipos de variables de clase, se pueden admitir, por ejemplo, variables que abarquen sólo relaciones *diádicas* entre individuos junto con los cuantificadores que las modifican. Por supuesto, los métodos de Wiener y Kuratowski hacen ver que el efecto de semejantes variables de relación y cuantificadores puede conseguirse en T o T_ω con otros medios; sin embargo, si T o T_ω han de utilizarse como base para una teoría científica o filosófica en la que tengan especial importancia ciertas relaciones diádicas entre individuos, suele ser conveniente tener tales relaciones como valores para las variables. Admitiremos, por tanto, estas variables y cuantificadores si las circunstancias lo requieren (véase VII, E). Todavía pueden admitirse otros tipos de variables de relación, por razones análogas.

Para ciertos fines es útil emplear sólo una parte de T_ω en vez de su totalidad. Podríamos no admitir todas las diferentes clases o variables de relación, sino sólo unas cuantas de tipos consecutivos partiendo de la de tipo más bajo: tendríamos que distinguir entonces varias teorías diferentes, dependientes en concreto de los tipos de variables y de los cuantificadores admitidos.

Consideremos un primer sistema que contenga sólo variables del tipo más bajo. Podemos suponer que tenemos como elemento primitivo la identidad de individuos, pero no tendríamos fórmulas atómicas tales como

$$\text{`}x_1^2 x_1^1\text{'},$$

pues éstas presuponen variables de dos tipos consecutivos. Sin embargo, pueden admitirse predicados primitivos no lógicos, con lo que llegamos a un sistema lingüístico de primer orden del tipo tratado en el capítulo II, pero sin constantes individuales ni funcionales primitivas.

Supongamos que admitimos variables del segundo tipo además de las del primero: tenemos entonces un sistema de *segundo orden* [1]. En rigor, hay que distinguir varios sistemas de segundo orden, según las clases de variables de relación admitidas, si las hay. En el próximo capítulo formularemos un metalenguaje semántico de segundo orden (§ E), en el que no admitiremos, aparte de las variables de clase, más que variables que abarquen relaciones diádicas, y elementos primitivos no lógicos (distintos de 'Den') análogos a los de MS_D^L. Los sistemas lingüísticos de segundo orden que contienen también variables de relación han demostrado ser de gran utilidad como lenguajes matemáticos [2]; la lógica subyacente a estos lenguajes tiene un alcance mucho mayor que la de los lenguajes de primer orden; en ellos pueden cuantificarse las clases y relaciones y a base de estas cuantificaciones pueden definirse muchos conceptos que no podrían ser definidos si no se dispusiera de ellas; a las reglas lógicas hay que añadir Reglas de cuantificación apropiadas que cubran todos los géneros de variables admitidos; los predicados primitivos no lógicos pueden tomar como argumentos cualesquiera

[1] Véase A. CHURCH, *op. cit.*, pp. 99-104. Sin embargo, la clasificación de Church difiere de la aquí empleada en algunos aspectos importantes.

[2] Véase HILBERT y BERNAYS, *op. cit.*, Supl. IV, vol. 2, pp. 451-95.

entes abarcados por alguna variable admitida. Hay aquí, pues, un enorme campo en que escoger los elementos primitivos.

Los sistemas lingüísticos de *tercer* orden admiten variables de tercer orden además de las variables (y los cuantificadores) de primero y segundo orden. Si entre las variables de segundo orden se incluyen las que abarcan relaciones diádicas, entre las de tercer orden se pueden incluir, además de las variables que abarquen clases de clases de individuos, variables que abarquen clases de relaciones diádicas entre individuos. Se admiten Reglas de cuantificación apropiadas para los nuevos tipos de cuantificadores admitidos; por supuesto, pueden añadirse predicados primitivos no lógicos adecuados: éstos pueden tomar como argumentos cualesquiera entes abarcados por alguna variable admitida.

De un modo análogo se continúa con los sistemas lingüísticos de *cuarto* orden, *quinto*, etc. A cada nivel se admiten nuevas variables (y nuevos cuantificadores) del tipo apropiado, posiblemente sólo variables de clase o posiblemente variables de relación de un grado determinado que se especifica.

Estos sistemas lingüísticos de orden finito pueden todos volverse a formular como sistemas lingüísticos de primer orden: esto se deduce claramente de las anteriores observaciones acerca de la relación entre individuos$_1$ e individuos$_2$. No dejamos, pues, de ocuparnos aquí de algunos sistemas que en otra formulación son de orden superior.

Muchas de las anteriores observaciones son vagas e imprecisas. Pero este tosco esquema de lo que son los sistemas lingüísticos de orden superior es todo lo necesario para nuestra finalidad presente: sólo en el próximo capítulo trataremos de tales sistemas, a propósito de un tipo importante de metalenguaje semántico de segundo orden.

CAPÍTULO VII

Satisfacer, designar, determinar

En este capítulo dejamos de considerar como relación semántica primitiva la denotación múltiple y nos ocupamos de otras tres posibilidades. Ya hemos mencionado en (IV, C) una de ellas, la relación diádica de *satisfacción*. Estudiaremos dos relaciones primitivas más, las relaciones diádicas de *determinación* y *designación*. Los metalenguajes correspondientes siguen de cerca el modelo de MS_D^L, pues entre ellos no existen prácticamente más que diferencias de detalle. Mostraremos que muchos de estos metalenguajes son equivalentes entre sí; no obstante, creemos que estas distintas formulaciones posibles tienen cierto interés; no las desarrollaremos en detalle, sino que simplemente esbozaremos sus rasgos más característicos.

El *metalenguaje semántico basado en la satisfacción* se tratará en el § A. El metalenguaje semántico basado en la *designación*, para el cual se toma T como lenguaje objeto, ocupará el § B. En el § C esbozaremos, tomando también T como lenguaje objeto, un metalenguaje semántico basado en la *determinación*. En el § D haremos algunas observaciones acerca de por qué los metalenguajes semánticos basados en la designación o en la determinación no son apropiados cuando se toma S como lenguaje objeto. En el § E consideramos las circunstancias en las cuales las relaciones semánticas tomadas hasta ahora como primitivas se vuelven *definibles*. Finalmente, en el § F adelantamos algunas explicaciones *en favor de* los métodos semánticos desarrollados hasta aquí en este libro.

A. Satisfacer

Daremos a la satisfacción (simbolizada por 'Sat') el sentido estricto en el que fue definida en (IV, C). Allí se la definió a partir de la denotación múltiple; pero recordaremos que también ésta fue definida basándose en la satisfacción. 'x Sat a' ha de leerse, 'el objeto x satisface la expresión a'. Los objetos que constituyen el dominio de esta relación son precisamente los objetos del dominio fundamental de L, y las expresiones que constituyen su codominio son expresiones de L de determinada clase. Por tanto, un metalenguaje semántico basado en 'Sat' no ha de diferir más que ligeramente del basado en 'Den'.

Como reglas semánticas tenemos ahora unas *Reglas de satisfacción*

en lugar de las Reglas de denotación (IV, D). La primera es muy semejante a *RDen1*. Establece que, para todo x, x satisface una expresión a si y sólo si ---x---, donde 'a' se toma como descripción estructural de '---x---' (que es una función proposicional de (como máximo) la variable única x de la parte traducente del metalenguaje).

RSat1. $\vdash$ (x) (x Sat a . $\equiv$. ---x---), si (etc., del modo conveniente).

Recordemos que la segunda Regla de denotación es una regla restrictiva, que establece que si una expresión denota algo, sea lo que fuere, dicha expresión es una constante predicado. Análogamente necesitamos aquí una regla que establezca que si una expresión es satisfecha por algo, sea lo que fuere, dicha expresión es una función proposicional de una variable como máximo.

RSat2. $\vdash x$ Sat a . $\supset$. (Eb) FuncPropUna a,b.

Puesto que 'Den' es definible a base de 'Sat', los diversos conceptos semánticos de MS^L_D, pueden ahora definirse también a partir de 'Sat'. En vez de seguir simplemente con las definiciones de MS^L_D, definiríamos ahora directamente muchos de los conceptos, usando 'Sat', *mutatis mutandis*, en lugar de 'Den'. Entre estos conceptos está el de verdad, definible de un modo particularmente sencillo como sigue:

'Vrd a' abrevia '(Prop a . $(x)x$ Sat a)'.

Puede mostrarse que esta definición es adecuada por un método esencialmente igual al empleado antes.

Si T se toma como L, puede formularse fácilmente un metalenguaje semántico para T basado en 'Sat' teniendo en cuenta los cambios que exige el modo de tratar las variables. *RSat1* sería parecido a *RDen1* de MS^L_D y *RSat2* se leería

$\vdash x^n_m$ Sat a . $\supset$. (Eb) (Vbl^n b . FuncPropUna a,b).

A partir de *RSat1* y *RSat2* no es difícil demostrar *RDen1* y *RDen2*. E inversamente, a partir de *RDen1* y *RDen2* pueden demostrarse dentro de MS^L_D, *RSat1* y *RSat2*. Luego en un sentido apropiado estos dos metalenguajes son equivalentes para todo L dado.

Ambos tipos de metalenguajes son aplicables a todo L de primer orden, ya sea en sentido amplio o en sentido estricto. Nos ocuparemos ahora de dos métodos algo más limitados y que parecen apropiados ante todo para su aplicación a sistemas tales como T. El primero de ellos está basado en la relación de designación y el segundo en la de determinación.

B. Designar en T

La designación ha de entenderse aquí en el sentido de 'denotación singular' [1]. Se trata, por tanto, de una relación en la cual se reali-

[1] Los metalenguajes semánticos basados en la relación de designación han sido estudiados en especial por Carnap. Cf. su *Introduction to Semantics*, pp. 49-54 y *passim*; y *Meaning and Necessity*, *passim*. La semántica contenida en esta sección se formuló por primera vez en el trabajo del autor «On Types, Denotation, and Truth», *Methodos*, 12 (1951), pp. 308-16, que está en deuda con el profesor Alonzo Church por haber señalado un error de este trabajo en la recensión que hizo de él (*The Journal of Symbolic Logic* 19 (1954), pp. 139-40).

za el Principio de univocidad. Recordamos que este principio, que establece que una expresión denotadora denota un objeto y sólo uno, fue abandonado al formular los metalenguajes semánticos anteriores. Para T tenemos, en rigor, no un principio de univocidad, sino una infinidad de ellos, uno para cada nivel del tipo igual o mayor que dos, como veremos inmediatamente.

Presuponemos que la sintaxis de T está desarrollada como en el capítulo III, con los reajustes necesarios indicados en (VI, D). Para construir la semántica de T necesitamos un símbolo primitivo para la relación de designación: sea éste 'Des'; podemos, pues, decir que una expresión de T (de determinado género) designa una clase (del tipo apropiado). Puesto que T no contiene constantes individuales como elementos primitivos, no es necesario poder decir que una expresión designa un individuo (ente del tipo más bajo); luego expresiones como

$$\text{'}a \text{ Des } x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\text{'}$$

tendrán sentido cuando $\mathfrak{n}$ sea cualquier sarta de acentos de al menos dos acentos, mientras que formas como

$$\text{'}x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}} \text{ Des } x^{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{q}}\text{' o '}x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}} \text{ Des } a\text{' o '}a \text{ Des } b\text{'}$$

se consideran carentes de sentido.

En MS^L_D, siendo L igual que en el capítulo II, existe cierta expresión que denota cada objeto de L. En MS^T_D, debido a las restricciones impuestas por los tipos, tenemos sólo que

$$\vdash (\mathrm{E}a)\,(x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}})a \text{ Den } x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}.$$

Igualmente, en el metalenguaje semántico basado en la satisfacción,

$$\vdash (\mathrm{E}a)\,(x)\; x \text{ Sat } a.$$

De estos tres principios se deduce respectivamente (por *TC33* (II)), que tenemos, en MS^L_D

$$\vdash (x)\,(\mathrm{E}a)a \text{ Den } x,$$

en MS^T_D

$$\vdash (x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}})\,(\mathrm{E}a)a \text{ Den } x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}},$$

y en el metalenguaje semántico basado en la satisfacción

$$\vdash (x)\,(\mathrm{E}a)x \text{ Sat } a.$$

Pero en una semántica para T basada en la designación carecemos por completo de principios análogos. Ni cada clase de un tipo dado es designada por una expresión —la que sea— ni existe expresión alguna que denote todas las clases de un nivel de tipo dado.

En lugar de las Reglas de denotación o de satisfacción, tenemos en este caso unas *Reglas de designación*. La primera corresponde a *RDen1* o *RSat1*. Establece que unas expresiones apropiadas designan determinadas clases.

RDes1. $\vdash (\mathrm{E}x^{\mathfrak{n}+1}_{\mathfrak{k}})\,(a \text{ Des } x^{\mathfrak{n}+1}_{\mathfrak{k}} .\, (x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}})\;(x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}} \in x^{\mathfrak{n}+1}_{\mathfrak{k}} .\equiv .\; \text{---}x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\text{---}))$, si '$\text{---}x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\text{---}$' es una función proposicional de la variable única '$x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}$' de la parte traducente del metalenguaje y 'a' se toma como descripción estructural del abstracto '$x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{z}\text{---}x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\text{---}$'.

Podría tentarnos escribir *RDes1* de un modo más simple como

(1) $$\vdash a \text{ Des } x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{z}\text{---}x^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{m}}\text{---},$$

donde, etc. Pero las expresiones que (1) afirma ser teoremas carecen de sentido, debido a la posición que tomamos aquí con respecto a los abstractos: no consideramos que puedan sustituir a las variables, razón

por la cual no somos libres de remplazar una variable por un abstracto (del tipo apropiado); si hemos de insertar aquí un abstracto apropiado en lugar de 'x_m^n', hemos de justificar tal proceso mediante una definición. Podríamos, si quisiéramos, definir expresiones de la forma dada en (1) tomando las expresiones correspondientes estipuladas como axiomas por *RDes1* como *definientia*. Pero esto no es necesario dada nuestra presente finalidad.

La segunda Regla de designación es una regla restrictiva que establece que, si una expresión *a* designa una clase x_m^{n+1}, entonces *a* es una constante predicativa del tipo *n+1*.

RDes2. $\vdash a$ Des $x_m^{n+1} . \supset .$ ConsPred^{n+1} *a*.

La tercera Regla de designación es un Principio de unicidad dentro de cualquier tipo.

RDes3. $\vdash a$ Des $x_j^{n+1} . a$ Des $x_k^{n+1} :\supset: x_j^{n+1} = x_k^{n+1}$, siendo **j** y **k** de longitud distinta.

No es necesario admitir por separado un Principio de unicidad entre tipos, pues puede demostrarse que

$$\vdash a \text{ Des } x_j^{n+1} . \supset . \sim a \text{ Des } x_k^{m+1},$$

siendo **n** y **m** sartas de acentos de distinta longitud [1]. Pues supongamos que

'a Des x_j^{n+1}' y 'a Des x_k^{m+1}'

se cumplen ambas, siendo **m** y **n** de distinta longitud. Entonces sabríamos por *RDes2* que se cumplirían tambien 'ConsPred^{n+1} *a*' y 'ConsPred^{m+1} *a*'; pero esto supondría una contradicción sintáctica; luego

TB1. $\vdash \sim(a$ Des $x_j^{n+1} . a$ Des $x_k^{m+1})$, siendo **m** y **n** de distinta longitud.

Las reglas de designación *RDes1* y *RDes3* logran juntas el efecto de Principios de univocidad: *RDes1* estipula que toda expresión de determinado género designa una clase de tal y cual tipo, y *RDes3* estipula que puede designar a lo sumo una clase de este tipo. Luego, usando también *RSin4*, tenemos que

TB2. $\vdash$ ConsPred^{n+1} *a* $. \supset .$ (Ex_m^{n+1}) (*a* Des $x_m^{n+1} .$ (x_j^{n+1}) (*a* Des x_j^{n+1} $. \supset . x_j^{n+1} = x_m^{n+1}$), si **j** y **m** son de distinta longitud.

Las definiciones de verdad a base de la designación pueden darse como sigue. Tomando 'FNP' como en (VI, E), establecemos que

'Vrd *a*' abrevia '(Prop *a* . (E*b*) (E*c*) (*b* PNF *a* . *c* S_{pd}^{epinv} *b* . (Ex_1^2) (*c* Des x_1^2 . (x_1^1) $x_1^1 \in x_1^2$))'.

Una proposición *a* es verdadera, en términos generales, si y sólo si el abstracto formado a partir de su forma normal prenexuada (en el sentido de (VI, E)) designa la clase universal de objetos del tipo más bajo. Podemos también definir

'Vrd *a*' como '(Prop *a* . (E*b*) (Vbl' *b* . (Ex_1^2) ((*b*$\frown$*epinv*$\frown$*a*) Des x_1^2 . (x_1^1) $x_1^1 \in x_1^2$)))'.

Según esta definición, una proposición *a* es verdadera si y sólo todo abstracto vacío que se forme a partir de ella usando como variable de abstracción una variable del primer tipo, designa la clase universal de

[1] Esta observación mejora el contenido del trabajo del autor citado en la nota anterior, en el cual se creía erróneamente que era necesario establecer como axioma un Principio de unicidad para tipos.

individuos. Existen otras definiciones parecidas que también podrían darse, en lugar de ésta.

La demostración de la adecuación de estas diversas definiciones es análoga a las anteriormente dadas.

Adviértase que aquí, como en MS_D^T, un elemento primitivo semántico muy restringido bastaría para construir una definición de verdad. De hecho, podríamos permitir que

'a Des x_m^{n+1}'

fuese significativo sólo cuando **n** tuviera la longitud 1.

La coherencia relativa del metalenguaje basado en la designación se mostrará más adelante, en el § D.

Con sólo ligeros cambios puede usarse el método de designación para proporcionar una semántica a T_ω o a un lenguaje formalizado sobre la base de una lógica de cualquier orden finito.

C. Determinar en T

Se halla otro metalenguaje semántico para T tomando como relación semántica primitiva una forma restringida de *determinación* en lugar de la relación de designación [1]. La determinación, como la designación, es una relación semántica que se establece entre expresiones de determinado género y clases del tipo apropiado; pero las expresiones son en este caso funciones proposicionales de a lo sumo una variable en vez de constantes predicativas. No existe, por tanto, entre estas dos relaciones semánticas más que una ligera diferencia. En el metalenguaje semántico basado en la determinación, donde 'Det' simboliza esta relación, formas como

'x_m^n Det a', 'a Det b', y 'x_m^n Det x_q^k'

carecen —por supuesto— de sentido y

'a Det x_m^{n+1}'

debe leerse 'la expresión a determina la clase x_m^{n+1}'.

Este metalenguaje semántico es muy parecido al esbozado en la sección anterior, pero en lugar de Reglas de designación necesitamos unas *Reglas de determinación* correspondientes. Está claro que son las siguientes:

RDet1. $\vdash (\mathrm{E}x_k^{n+1})\ (a \text{ Det } x_k^{n+1} \,.\, (x_m^n)\ (x_m^n \in x_k^{n+1} \,.\equiv.\, \text{---}x_m^n\text{---}))$, si '$a$' se toma como descripción estructural de '---x_m^n---' (o sea, de una función proposicional de la variable única 'x_m^n' de la parte traducente del metalenguaje).

RDet2. $\vdash a \text{ Det } x_m^{n+1} \,.\supset.\, (\mathrm{E}b)\ (\mathrm{FuncPropUna}\ a,b \,.\, \mathrm{Vbl}^n\ b)$.

RDet3. $\vdash a \text{ Det } x_j^{n+1} \,.\, a \text{ Det } x_k^{n+1} :\supset: x_j^{n+1} = x_k^{n+1}$, siendo **j** y **k** de distinta longitud.

RDet3 es una forma del Principio de unicidad dentro de cualquier tipo. Se puede demostrar un principio de unicidad entre tipos de modo esencialmente igual a como se ha hecho con el metalenguaje semántico basado en la designación.

[1] Véase R. Carnap, *Introduction to Semantics*, pp. 44-8.

Las definiciones de verdad para *T* basadas en la determinación son muy parecidas a las basadas en la designación, y pueden omitirse. La demostración de la coherencia relativa del metalenguaje basado en la determinación es también análoga a la que daremos dentro de un momento para el metalenguaje basado en la designación.

Es evidente que 'Des' y 'Det' pueden definirse cada una en el metalenguaje correspondiente a la otra.

'*a* Des x_m^{n+1}, puede abreviar '(E*b*) (E*c*) (FuncPropUna *b*,*c* . *a* = (*c*⌢ *epinv*⌢*b*). *b* Det x_m^{n+1})'.

y

'*a* Det x_m^{n+1}' puede abreviar '(E*b*) (E*c*) (FuncPropUna *a*,*c* . *b* = (*c*⌢ *epinv*⌢*a*) . *b* Des x_m^{n+1})'.

Luego *RDes1-RDes3* son demostrables a partir de *RDet1-RDet3* en el metalenguaje basado en 'Det', y viceversa en el metalenguaje basado en 'Des'. Por tanto, estos dos metalenguajes son equivalentes en un sentido apropiado.

D. Acerca de la designación y la determinación en S

Podríamos ahora intentar construir un metalenguaje basado en la designación o en la determinación para el lenguaje de teoría de conjuntos *S*, formulado anteriormente en (VI, A), suponiendo que pueda darse una definición de verdad análoga a la dada para T. Sería razonable esperar que esta nueva definición difiriese de la de *T* sobre todo en el modo de enfocar las variables. En particular, no habría distinción de tipos. Pero un momento de reflexión sobre los *definientia* de las definiciones de verdad dadas antes para *T* en el § B mostrará que una definición análoga para *T* a partir de la designación, si es posible, habrá de ser muy distinta: obsérvese que aquellos *definientia* contienen como elemento fundamental el miembro conyuntivo.

$$'(x_1^1)x_1^1 \in x_1^2'$$

Habría que suponer entonces que el *definiens* que la definición anterior implicaría en la definición de verdad para *S*, contendría un miembro conyuntivo de la forma

$$'(Ey)\ (\text{-------}\ .\ (x)x \in y)'.$$

Pero dentro de *S* no existe ningún conjunto universal *y* tal que todos los conjuntos sean miembros suyos. Luego nuestro *definiens* tendría la consecuencia de que ninguna proposición de *S*, cualquiera que fuese, sería verdadera: pues, según la definición que resultaría de seguir la de *T*, si *a* es una proposición verdadera, entonces existe dicho conjunto universal. Observaciones semejantes se aplican a la definición de verdad para *S* basada en la determinación. Luego no está claro que pueda darse una definición de verdad para *S* análoga a las anteriores dentro de un metalenguaje de primer orden basado en las estrechas relaciones de designación o determinación que estudiamos.

Las relaciones de designación y determinación parecen estar limitadas de un modo en que no lo están las de denotación y satisfacción. A partir de la denotación o de la satisfacción puede construirse un

metalenguaje semántico para cualquier sistema lingüístico de primer orden, ya sea en sentido amplio o en sentido estricto; los métodos de designación y determinación parecen, como hemos visto, más bien apropiados para sistemas de la índole de *T*; el problema de la construcción de una semántica para sistemas análogos a *S* basándose en la designación o en la determinación es un problema algo especial del que no es necesario tratar aquí con más amplitud [1].

Para sistemas de la índole de *T*, puede mostrarse que el metalenguaje basado en la designación o en la determinación es equivalente al basado en la denotación o la satisfacción. En los metalenguajes respectivos, 'Sat' para *T* puede definirse a partir de 'Det' para *T*, y viceversa, del modo siguiente. En el metalenguaje basado en 'Det',

'x_m^n Sat a' puede abreviar '(Ex_1^{n+1}) $(x_m^n \in x_1^{n+1} . a \text{ Det } x_1^{n+1})$',

y

'a Det x_m^{n+1}, puede abreviar '$((Eb)$ $(\text{Vbl}^n\ b . \text{FuncPropUna } a,b) .$ (x_1^n) $(x_1^n \in x_m^{n+1} . \equiv . x_1^n \text{ Sat } a))$'

en el metalenguaje basado en 'Sat'. A base de estas definiciones puede mostrarse que *RSat1-RSat2* son demostrables a partir de *RDet1-RDet3* en el metalenguaje de *T* basado en la determinación, y viceversa en el metalenguaje basado en la satisfacción. De un modo semejante,

'a Den x_m^n' puede abreviar '(Ex_1^{n+1}) $(a \text{ Des } x_1^{n+1} . x_m^n \in x_1^{n+1})$' dentro del metalenguaje basado en 'Des' y

'a Des x_m^{n+1}', puede abreviar '$(\text{ConsPred}^{n+1}\ a . (x_1^n)$ $(x_1^n \in x_m^{n+1} . \equiv .$ $a \text{ Den } x_1^n))$'

dentro de MS_D^r. Usando estas definiciones pueden demostrarse *RDen1-RDen2* a partir de *RDes1-RDes3* en el metalenguaje basado en 'Des', y viceversa en MS_D^r. Pero sabemos que 'Sat' y 'Den' son mutuamente definibles para todo *L* y que 'Des' y 'Det' son mutuamente definibles para los sistemas del tipo de *T*; luego los metalenguajes basados en la satisfacción o en la denotación son equivalentes a los basados en la determinación o la designación, tomando *T* como lenguaje objeto. Por tanto, también los metalenguajes de *T* basados en 'Des' o 'Det' son coherentes si el lenguaje conjunto compuesto de *M* y la traducción de *T* lo es.

E. La definición de las relaciones semánticas

Cada uno de los metalenguajes semánticos desarrollados anteriormente (incluyendo los de los capítulos IV-VI) está determinado por cierta relación semántica que se toma como primitiva. Toda semántica de este tipo puede llamarse semántica *basada en un elemento primitivo especial*. Existen también otros métodos generales para construir metalenguajes semánticos; en realidad, podemos distinguir cuatro:

(1) el método de la *definición*,
(2) el método de la *verdad como elemento primitivo*,
(3) el método de los *elementos primitivos especiales*,

[1] Cf., sin embargo, G. D. W. Berry, «On Formalizing Semantics», resumen en *The Journal of Symbolic Logic*, 7 (1942), pp. 47-8.

y

(4) el método *intraducente*.

En los capítulos anteriores y en los parágrafos §§ A-D de este capítulo, hemos dado una idea bastante completa de (3) y en los capítulos sucesivos presentaremos detalladamente el método (4). En este apartado, para completar, queremos ocuparnos muy brevemente de los métodos (2) y (1).

Puede formularse fácilmente una semántica del tipo (2), en la cual se tome como único elemento primitivo semántico un predicado 'Vrd': una Regla de adecuación, junto con la ley que estipula que toda verdad (de L) es una proposición (de L) [1], proporcionarían los axiomas semánticos; si L contiene la aritmética, la sintaxis subyacente puede aritmetizarse o bien puede desarrollarse como en el capítulo III. El metalenguaje semántico resultante sería muy semejante a los ya tratados.

Por supuesto, 'Vrd' mismo podría considerarse un elemento primitivo especial, en cuyo caso el método (2) aparecería como un caso especial de (3). Sin embargo, dado lo fundamental que es el concepto de 'Vrd', podemos considerar que (2) es un método diferente.

Ocupémonos ahora del método (1) [2]. En este caso no permitimos *ningún* elemento primitivo semántico, sino que exigimos que *todos los términos y relaciones semánticas sean definidos*. Para definir estos conceptos semánticos hemos de presuponer en el metalenguaje unos recursos cuyo alcance sea al menos igual al de los que poseen los metalenguajes ya formulados. De hecho, como ya hemos observado en (V, H), el metalenguaje semántico ha de ser siempre «esencialmente más rico» en varios aspectos importantes que el lenguaje objeto. Si no tenemos elementos primitivos semánticos específicos ni axiomas que los caractericen, la riqueza esencial del metalenguaje ha de hallarse en otro lugar: podemos lograr el alcance deseado en el metalenguaje exigiendo que sea un lenguaje de un orden *superior* al del lenguaje objeto; si L^n es un lenguaje objeto de orden n, podemos formular un metalenguaje semántico de orden $(n+1)$ en el cual sean definibles los conceptos básicos de la semántica (con relación a L^n). A fin de ver esto con más claridad, tomemos L^n como lenguaje de primer orden (para $n = 1$) y esbocemos brevemente su semántica dentro de un metalenguaje de *segundo* orden.

Sea L igual que en el capítulo III. Dentro del metalenguaje semántico de segundo orden, que llamaremos MS_2^L, presuponemos la sintaxis de dicho capítulo. MS_2^L contiene también una traducción de L, además de dos géneros de variables del segundo tipo: debe considerarse que éstas abarcan respectivamente *clases* de objetos (de L) o de expresiones (de L) o de ambos, o bien *relaciones diádicas* entre objetos y expresiones y entre objetos y objetos, expresiones y expresiones o expresiones y objetos. (Podríamos también admitir variables que abarcaran relaciones triádicas, pero no serán necesarias.) Sean 'F' y 'G', con o sin subíndices numéricos, las variables de clase y sean 'R' y 'Q' —con o sin subíndi-

[1] Véase TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff*, § 5.

[2] Este método se debe fundamentalmente a TARSKI, en *Der Wahrheitsbegriff*.

ces— las variables de relaciones diádicas[1]. Dentro de MS_2^L, además de los axiomas sintácticos y de los axiomas no lógicos de L, se tienen también los axiomas lógicos acerca de las funciones veritativas y los cuantificadores, incluyendo cuantificadores para todos los géneros de variables admitidos. (Véase VI, G.) Con este somero esquema quedarán claros los rasgos más característicos de MS_2^L.

Podemos ahora definir 'Den' o 'Sat' dentro de MS_2^L: escogeremos 'Sat'. Necesitamos dos o tres conceptos preliminares, que definiremos a continuación.

'SartaImpTildes *a*' abrevia '(E*b*) (*a* IngEnm *b* . (*c*) (*c* IngEnm *b*: ⊃: *c* = *tilde* .v. (Ed) (*d* Ant$_b$ *c* . *c* = (*tilde*⌢*tilde*⌢*d*)))',
y análogamente,

'SartaParTildes *a*' abrevia '((*b*) (SP *b* . Seg *a* :⊃: *b* = *tilde*) . ~Sarta ImpTildes *a*)'.

Hemos dado respectivamente las definiciones de sarta *impar* de tildes y de sarta *par* de tildes. Para simplificar, supongamos de momento que L no contiene ningún elemento primitivo '=' y sólo *dos* constantes predicativas primitivas, 'P' y 'P'', teniendo éstas respectivamente uno y dos lugares vacíos. Podemos entonces definir el concepto de satisfacción *pseudo-atómica* mediante una especie de enumeración.

'*x* SatPsAt *a*' abrevia '((E*b*) (Vbl *b* . *a* = (*pe*⌢*b*) . P*x*) .v. (E*b*) (E*c*) (E*d*) (E*e*) (Vbl *b* . Vbl *c* . SartaParTildes *d* . SartaImpTildes *e* : ((*a* = (*b cu pe*⌢ *ac*⌢*b*⌢*c*) .v. *a* = (*b cu d*⌢*pe*⌢*ac*⌢*b*⌢*c*)) . (*y*)P'*yx*) .v. (*a* = (*b cu e*⌢*pe*⌢*ac*⌢*b*⌢*c*) . (*y*)~P'*yx*) .v. ((*a* = (*c cu pe*⌢*ac*⌢*b*⌢*c*) .v. *a* = (*c cu d*⌢*pe*⌢*ac*⌢*b*⌢*c*)) . (*y*)P'*xy*) .v. (*a* = (*c cu e*⌢*pe*⌢*ac*⌢*b*⌢*c*) . (*y*)~P'*xy*)))'.

Obsérvese que cuando *x* satisface pseudo-atómicamente *a*, ésta tiene una de las formas siguientes (en las que x e y son variables distintas):

'Px',
'(y)P'yx',
'(y)~. . . .~P'yx',
(número par de veces)
'(y)~ . . . ~P'yx',
(número impar de veces)
'(y)P'xy',
'(y)~. . . .~P'xy',
(número par de veces)

o

'(y)~ . . . ~P'xy'.
(número impar de veces)

(Si L contiene predicados primitivos adicionales o un elemento primitivo '=', la lista debe ampliarse convenientemente.) El concepto de satisfacción puede entonces definirse así:

'*x* Sat *a*' abrevia '(*R*) ((*y*) (*b*) (*y R b* :≡: *y* SatPsAt *b* .v. (E*d*) (E*e* (FuncPropUna *d*,*e* . *b* = (*tilde d*) . ~*y R b*) .v. (Ec) (E*d*) (E*a'*) (FuncPropUna *c*,*a'* . FuncPropUna *d*,*a'* . *b* = (*c uve d*) . (*y R c* .v. *y R d*)) .v

[1] En rigor, tampoco son necesarias las variables de clase, y se puede prescindir de ellas si se quiere.

(E*c*) (E*d*) (FuncPropUna *c*,*d* . *b* = (*d cu c*) . (*z*)*z R c*)) . ⊃ . *x R a*)'[1]. Sobre la base de esta definición pueden demostrarse, dentro de MS_2^L, *RSat1* y *RSat2* (del § A anterior), para un *L* apropiado. Sabemos que a partir de 'Sat' pueden definirse los otros conceptos de la semántica de *L* y que a partir de *RSat1* y *RSat2* pueden demostrarse los teoremas básicos de la semántica.

Adviértase que esta definición de 'Sat' es en realidad una definiclón recurrente. Con el definiens como hipótesis, consideramos primero '*y R b*' en los casos más simples, cuando *y* satisface *b* pseudo-atómicamente; entonces, admitiendo que 'Sat' quede definida para este caso de *b*, abordamos casos de creciente complejidad, que incluyen '∼', 'v' o cuantificadores. El efecto de este procedimiento recurrente se consigue gracias al cuantificador '(*R*)', cuya presencia es esencial en el definiens.

Si se toma el lenguaje objeto *L* como sistema lingüístico de cualquier orden finito, puede construirse de un modo análogo un metalenguaje semántico (basado en definiciones) para *L* de orden inmediato superior; este método de las definiciones puede ampliarse a fin de aplicarlo a lenguajes objeto de gran alcance como *T*, T_ω o *S*. Para basar en definiciones una semántica de estos sistemas podemos, o bien presuponer en el metalenguaje variables de *tipo transfinito*, o bien emplear otros procedimientos matemáticos de alcance comparable; pero bien pueden surgir algunas dudas acerca de la legitimidad de semejantes procedimientos en semántica; det odas formas, el problema de dar a estos sistemas de gran alcance una semántica basada en definiciones es algo especial, y no es necesario extendernos más sobre ello[2].

Hemos indicado que un metalenguaje basado en definiciones para un lenguaje objeto L_1 debe ser «esencialmente más rico» en modos de expresión lógicos o semánticos que L_1 mismo. Con frecuencia, el metalenguaje semántico es *materialmente más rico* en modos de expresión que L_1: es decir, que contiene, no sólo una traducción de L_1, sino también una ampliación material conveniente de L_1. En este caso, el metalenguaje puede contener, en términos generales, cierto L_2 del cual una parte sea una traducción de L_1, o bien puede contener axiomas de mayor alcance que los de L_1. Los elementos primitivos de L_2 han de ser tales que contengan los de L_1 o que éstos sean definibles a partir de aquéllos; y los axiomas de L_2 han de ser tales que todos los teoremas de L_2 sean demostrables a partir de aquéllos, pero no a la inversa. Por supuesto, los metalenguajes materialmente más ricos son también, *a fortiori* esencialmente más ricos. Tendremos pocas ocasiones de volver a hablar de estos metalenguajes, pero pueden ser útiles en determinados casos y es importante distinguirlos de los otros tipos que hemos venido considerando.

---

[1] Esta definición es una modificación de la de TARSKI, *op. cit.*; pp. 311-12.

[2] Véanse, sin embargo, los trabajos de KEMENY y WANG citados en la nota 1, página 144.

F. En favor de MS_D^L y de otros metalenguajes semánticos semejantes

Al cerrar esta parte del estudio y antes de entrar en la semántica intraducente, repasemos algunos de los ragos generales de los metalenguajes semánticos basados en elementos primitivos especiales, comparándolos y contrastándolos con los metalenguajes basados —como MS_2^L— en el método de la definición.

En primer lugar, un metalenguaje basado en un elemento primitivo especial proporciona una semántica directamente axiomática, pues los axiomas caracterizan implícitamente el elemento primitivo especial adoptado. Una semántica de esta índole es, en ciertos aspectos, análoga a una axiomatización directa de la aritmética en la que se tomasen los números naturales (o los números enteros positivos) como valores para las variables. Para determinados fines podría desearse una caracterización axiomática directa de los números naturales en lugar de un análisis lógico de ellos (como el dado por Frege o Russell); aquí hemos dado una caracterización axiomática directa de —por ejemplo— la denotación múltiple, en vez de un análisis lógico de ella mediante el método de definiciones; ambas clases de métodos semánticos pueden ser interesantes y útiles para determinados fines, igual que los dos métodos análogos son de interés en la formulación de la aritmética; la caracterización axiomática directa posee ventajas en ambos casos.

Los metalenguajes semánticos basados en elementos primitivos especiales están de acuerdo con la perspectiva filosófica general del constructivismo de primer orden. Dado un lenguaje objeto L, queremos dar los conceptos básicos en la semántica de L usando sólo conceptos lógicos y semánticos muy limitados. Las razones de preferir estos conceptos limitados deberían ser obvias; consideraremos detalladamente algunas de las razones que abogan por el constructivismo de primer orden en un capítulo ulterior (XIII); pero indicamos ahora de nuevo que si L se toma como un lenguaje de primer orden en sentido estricto, entonces MS_D^L y los metalenguajes semánticos semejantes lo son también; mas, si L es un lenguaje de primer orden sólo en sentido amplio, entonces MS_D^L y los metalenguajes semánticos semejantes lo son en el mismo sentido. El carácter de los metalenguajes semánticos como lenguajes de primer orden depende tan sólo del carácter del lenguaje objeto, y en modo alguno de los conceptos sintácticos y semánticos utilizados. Por otra parte, si el lenguaje objeto es de orden n, una semántica basada en el método de definición sólo puede formularse dentro de un sistema de —al menos— orden $(n + 1)$ (o de orden n sólo en un sentido ampliado). Una semántica formulada a base de un elemento primitivo especial tiene la ventaja de presuponer solamente el tipo de lógica básica sumamente sencilla que hemos tratado en el capítulo II, para un lenguaje L de primer orden.

Hemos indicado también que el método semántico de los elementos primitivos especiales es general, en el sentido de que es aplicable a todos los lenguajes objeto del género apropiado, incluyendo lenguajes tales como S y T. Esto, naturalmente, no significa que los lenguajes objeto

se tomen como valores para variables (véase (XIII, H)); estos métodos son generales más bien en el sentido de que, de cualquier *L* fijo dado, resulta inmediatamente un método de construir un metalenguaje semántico de *L*. (Una posible excepción a esta característica es el caso de los metalenguajes semánticos basados en la designación o la determinación para lenguajes objeto del tipo de *S*.) Hemos observado anteriormente ciertas limitaciones a este respecto en el método semántico de definición, a no ser que éste se amplíe convenientemente.

Debemos indicar también la extraordinaria simplicidad de estos metalenguajes: todos los elementos primitivos usados en ellos son relaciones semánticas particularmente sencillas y palmarias; no se necesitan conceptos complicados para construir las teorías de los elementos primitivos especiales que se adopten (en particular, no se requieren como valores para variables números naturales, ni series infinitas de entidades de ningún género, ni expresiones de tipo transfinito, etc.) [1]. Los conceptos lógicos en una semántica basada en definiciones son aproximadamente equivalentes a los que se requieren para desarrollar la teoría matemática de los números reales fundándola en los números enteros [2], y parecería algo anómalo requerir semejantes conceptos de gran alcance para formular la teoría semántica, cuya estructura es y debe ser esencialmente muy sencilla.

Estas diversas ventajas también se aplican cuando se considera una semántica en la cual 'Vrd' esté tomado como elemento primitivo.

Por otra parte, una semántica basada en el método de definición posee la importante ventaja de que todos los términos semánticos son definibles en ella, pero a costa de presuponer una lógica básica de mayor alcance.

No obstante, en un sentido más profundo, una semántica basada en 'Vrd' o en un elemento primitivo especial es fundamentalmente igual a una semántica basada en definiciones desde el punto de vista siguiente. Para ambos tipos de teorías necesitamos nuevos elementos primitivos; o bien tomamos nuevos elementos primitivos lógicos, o bien los que llamamos específicamente *semánticos* (pero el nombre que les demos es de escasa importancia). En el primer caso adoptamos un sinnúmero de elementos primitivos, variables y cuantificadores de clases, relaciones diádicas, etc., de un tipo al menos inmediato superior al de las variables del tipo más alto que aparezcan en el lenguaje objeto: hacen falta nuevos axiomas y reglas que caractericen estos nuevos cuantificadores. Lo mismo puede decirse de una semántica basada en un elemento primitivo especial: pero en este caso necesitamos únicamente un nuevo elemento primitivo caracterizado por unas reglas semánticas adecuadas, *elegidas sólo para que nos proporcionen una semántica y nada más*. En el método de definición, los nuevos cuantificadores y las nuevas reglas otorgan bastante más de lo que se pretende: a base de semejantes cuantificadores pueden formularse nuevos terrenos de la teoría lógica. Pero si estos

[1] El método de TARSKI requiere fundamentalmente algunas de estas entidades, aunque no dentro de los metalenguajes basados sobre el método de definición como el MS_D^L anteriormente tratado.

[2] Cf. HILBERT y BERNAYS, *op. cit.*, vol. 2, Supl. IV.

cuantificadores no son necesarios y de hecho no se usan nunca, no parece haber razón para introducirlos con fines semánticos. Una semántica basada sobre un elemento primitivo especial concentra la atención en los conceptos efectivamente necesarios con arreglo a la finalidad perseguida.

Veríamos esto con un poco más de claridad si hubiésemos de formular una semántica basada, no en un elemento primitivo especial, sino únicamente sobre las nuevas variables, cuantificadores y *contextos en que éstos aparecen*, que se usan efectivamente. Hemos visto en el § E que sólo necesitamos nuevas variables y cuantificadores para relaciones diádicas (de determinada clase); si hubiésemos de desarrollar con detalle la semántica del § E, veríamos, además, que sólo necesitamos estos cuantificadores en tanto que prefijados a fórmulas de determinadas formas: así, incluso los cuantificadores para todas las relaciones diádicas, en tanto que prefijados a todas las fórmulas admisibles, son innecesarios en semántica. (No hace falta que mostremos esto con detalle; debe quedar suficientemente claro a partir de las consideraciones del § E). En efecto, en una semántica basada en un elemento primitivo especial escogemos sólo los cuantificadores y contextos a los que éstos se prefijan que son realmente necesarios; dicho elemento nos permite simbolizar estos cuantificadores y contextos de un modo sencillo, conveniente y claro.

No parece, pues, que exista un auténtico conflicto entre estos dos tipos de semántica: una de ellas no es en realidad sino un fragmento de la otra y, por ello, goza de muchas ventajas. Debido a que hasta aquí la atención se ha centrado casi exclusivamente en la semántica basada en definiciones, hemos creído de interés en este libro desarrollar el método de los elementos primitivos especiales con bastante detalle.

CAPÍTULO VIII

Semántica intraducente (I)

Los diversos metalenguajes semánticos desarrollados en los capítulos anteriores tienen en común un importante rasgo: contienen, de una u otra forma, la totalidad del lenguaje objeto, *L*, al cual se aplican. Una manera de conseguir esto consiste, como hemos visto, en hacer corresponder a cada símbolo del lenguaje objeto su traducción en el metalenguaje semántico; también podemos pensar que este último es simplemente una ampliación del lenguaje objeto, conseguida gracias a la adición de ciertos elementos primitivos sintácticos y semánticos, junto con axiomas que los caractericen. Pero, en ambos casos, el lenguaje objeto *L* reaparece *in toto* en el metalenguaje semántico. Podemos llamar a todo metalenguaje semántico de este tipo, metalenguaje *traducente*, y a la semántica que implica, *semántica traducente*. Todos los metalenguajes semánticos que han sido estudiados hasta aquí con cierto detalle técnico, en este libro y en otros estudios, parecen ser de carácter *traducente*.

En este capítulo plantearemos las bases de una teoría semántica que podremos llamar, por carecer de este rasgo decisivo, *semántica intraducente*, y los metalenguajes que formularemos serán llamados *metalenguajes semánticos intraducentes*. Estos metalenguajes suponen una divergencia radical con todas las clases de metalenguajes estudiados hasta ahora. En algunos aspectos, como veremos, tienen un alcance menor, y algunos principios de la semántica traducente deberán ser sacrificados. Teniendo en cuenta el papel vital que estos principios han desempeñado hasta aquí, es quizá curioso que se pueda conseguir tanto sin ellos. Pero esto es anticipar las cosas.

La denotación múltiple y los demás elementos primitivos semánticos considerados en el capítulo VII, como recordaremos, ponen en relación las expresiones de un lenguaje con los objetos acerca de los cuales habla este lenguaje. Una semántica fundada en relaciones de este tipo debe, por lo tanto, contener expresiones para los símbolos del lenguaje objeto, así como para sus objetos. El propósito del presente capítulo es abandonar el carácter primitivo de todas estas relaciones, poniendo en su lugar o bien la *subsunción*, o bien la *comprensión* (como fueron definidas en el capítulo IV). Al no introducir ningún elemento primitivo más, obtenemos un metalenguaje semántico que habla exclusivamente de las expresiones del lenguaje objeto, y no de sus objetos, ya que los elementos relacionados en la comprensión y en la subsunción son exclusivamente

expresiones. Al tomar como primitiva esta relación puramente lingüística, evitamos la necesidad de aumentar el metalenguaje con la incorporación del lenguaje objeto dentro de él. La ganancia en economía y sencillez, es, por supuesto, enorme.

Formularemos diversas posibilidades de metalenguajes intraducentes, algunos de los cuales serán más sencillos que otros, en ciertos aspectos. Mostraremos que estos diversos metalenguajes son equivalentes y —más tarde— que proporcionan una base *mínima* para la semántica, en un sentido apropiado.

Estudiaremos en el § A cuáles son los *elementos primitivos* de un metalenguaje semántico fundado en la comprensión; en el § B se darán unas *definiciones* preliminares; en el § C definiremos de diversas maneras el *concepto semántico de verdad*, y en el § D daremos las *reglas* que nos permitan la formulación de la semántica intraducente; por fin, se sugieren diversas *formulaciones posibles* en el § E. En el próximo capítulo continuará la exposición.

A. Elementos primitivos

El primer metalenguaje semántico intraducente de que trataremos se compone de la teoría elemental del encadenamiento del capítulo III, aumentada con una teoría de la comprensión. La lógica básica presupuesta es del tipo considerado en el capítulo II. El metalenguaje tiene, así, una estructura muy sencilla: es un sistema lingüístico de primer orden (simple, aplicado), cuyo dominio fundamental está formado por individuos en un sentido muy estricto. Cuando 'Cmpr' sea el único elemento primitivo semántico, el metalenguaje se llamará MS_O^L, el metalenguaje semántico de L fundado en la comprensión. Las únicas variables que se requieren son las variables representativas de expresiones '*a*', '*b*', etc.

El concepto de *término* en MS_O^L puede definirse (por recurrencia) en un metalenguaje de MS_O^L como toda variable o toda constante descriptivo-estructural, o como '(x⌢y)', donde x e y son términos cualesquiera. El concepto de *fórmula* se define como cualquier expresión 'x = y' o 'x Cmpr y', donde x e y son términos, o como '~A', '(A v B)', '(x)A', o 'x∃Ay', en donde A y B son fórmulas, x una variable e y un término: esto constituye, en resumen, una descripción completa de la constitución primitiva de MS_O^L. El lenguaje objeto L debe tomarse aquí en el sentido del capítulo III, o sea, como un sistema lingüístico cualquiera de primer orden, simple y aplicado, en el cual se incluya la identidad, pero no constante individual ni funcional algunas.

B. Algunas definiciones

Antes de dar las reglas de MS_O^L, nos ocuparemos de algunas definiciones de conceptos ulteriores que han de ser útiles. Debe considerarse que las definiciones de los diferentes conceptos *sintácticos* de los capítulos III-V reaparecen aquí como definiciones de MS_O^L.

Habiendo tomado la comprensión como elemento primitivo, podríamos tener ocasión de utilizar su recíproco. Para justificar esto necesitamos la definición de la *subsunción*, tal y como se dio en (IV, C).

'*a* Sub *b*' abrevia '*b* Cmpr *a*'.

La definición siguiente será la del concepto de expresión *denotadora*. No existía una necesidad formal de este concepto anteriormente (en los capítulos IV-VII): las expresiones denotadoras se identificaban allí con las constantes predicativas; también aquí se las identificará con dichas constantes pero explícitamente, por medio de una regla; pero en primer lugar hay que definir este concepto a base de la comprensión. Una expresión *a* de *L* es una expresión denotadora de *L* si y sólo si existe una expresión *b* de *L* tal que, o bien *a* comprende *b*, o *b* comprende *a*; o, dicho de otro modo, si y sólo si *a* es un miembro del campo de la comprensión. Establecemos que

'ED *a*' abrevia '(E*b*) (*a* Cmpr *b* .v. *b* Cmpr *a*)'.

Por supuesto, esta definición no es muy instructiva: no sabemos todavía qué expresiones de *L* son expresiones denotadoras y cuáles no lo son. Postularemos más tarde que las expresiones denotadoras de *L* son precisamente las constantes predicativas (véase la primera regla del § D): llamemos a este supuesto *Regla de las expresiones denotadoras*. Obsérvese que 'constante predicativa' es una frase puramente sintáctica, mientras que 'expresión denotadora' es semántica, por estar definida a partir de la comprensión; la Regla de las expresiones denotadoras relaciona estos dos conceptos entre sí.

Dos expresiones son coextensas (como en (IV, C)) si se comprenden mutuamente:

'*a* CoExt *b*' abrevia '(*a* Cmpr *b* . *b* Cmpr *a*)'.

Las definiciones siguientes están también estrechamente relacionadas con las definiciones correspondientes de (IV, C): las definiciones se basan allí en la denotación múltiple; aquí los conceptos que éstas contienen serán definidos de otra manera, a partir de la comprensión.

Una expresión es semánticamente *nula* si y sólo si está comprendida por toda constante predicativa.

'Nula *a*' abrevia '(*b*) (ConsPred *b* . ⊃ . *b* Cmpr *a*').

De la sintaxis se sigue que existe por lo menos una constante predicativa y, por ello, que cuando *a* sea nula existirá por lo menos una *b* que comprenda *a*. De aquí que, según la Regla de las expresiones denotadoras, si *a* es nula, sea una constante predicativa y, por lo tanto, que no sea necesario añadir al definiens la cláusula 'ConsPred *a*'. Como se podía esperar de las consideraciones de los capítulos IV y V, la teoría tiene en cuenta una infinidad de constantes predicativas, distintas pero coextensas. Hablando intuitivamente y de nuevo en el terreno de la denotación múltiple, diremos que las constantes predicativas nulas son aquéllas que no denotan nada.

De un modo análogo, podemos hablar también de expresiones semánticas *universales*.

'Univ *a*' abrevia '(*b*) (ConsPred *b* . ⊃ . *a* Cmpr *b*)'.

Todas las expresiones universales serán constantes predicativas por razones parecidas a las que se daban en el caso de las constantes pre-

dicativas nulas, de manera que no es necesario añadir 'ConsPred' *a*' al definiens. Los postulados serán tales que aseguren la existencia de un infinidad de constantes predicativas universales, distintas pero mutuamente coextensas. Hablando intuitivamente, una constante predicado universal denota todos los objetos de *L*.

Conviene tener una notación especial para las constantes predicados no nulas. Por ello, como en (IV, C), establecemos que

'E! *a*' abrevia '(ConsPred *a* . ~ Nula *a*)'.

Supongamos que tenemos una constante predicado no nula, *a*, tal que esté comprendida por toda expresión no nula que ella comprenda. Así, una constante predicativa *a* denota, (1) por lo menos un objeto, y (2) a lo sumo un objeto: que (1) es cierto es evidente ya que *a* es no nula; que (2) también lo es puede verse como sigue (gracias a la sintaxis sabemos que en *L* existe una infinidad de constantes predicativas disponibles). Sea *b* cualquier expresión no nula que *a* comprenda; supongamos que *b* denota sólo dos objetos; pero *b* comprende también *a* por hipótesis, de manera que *a* también puede denotar a lo sumo dos objetos; sea ahora *c* una entre las múltiples expresiones que denotan tan sólo un objeto; si *a* comprende *c*, por hipótesis *c* también deberá comprender, *a* de manera que *a* podrá denotar a lo sumo un solo objeto. Por consiguiente, si *a* es una constante predicativa no nula y está comprendida en cada expresión no nula que ella comprende, *a* denota un objeto, y sólo uno. Una expresión semejante es una constante predicativa semánticamente *unitaria*.

'Unit *a*' abrevia '(E! *a* . (*b*) (~Nula *b* . *a* Compr *b* :⊃: *b* Cmpr *a*)) .

Una constante predicativa *común* es aquella que no es unitaria y es no nula.

'Com *a*' abrevia '(E! *a*. ~Unit *a*)'.

La *suma semántica* de dos constantes predicativas *b* y *c* denota todo lo denotado ya sea por *b* o por *c*. Expresándonos totalmente en términos de comprensión, podemos decir que una expresión *a* es la suma semántica de las expresiones *b* y *c* cuando *a* comprende a la vez *b* y *c* y cuando cada *d* que comprende a la vez *b* y *c*, comprende también *a*.

'*a* Sum *b*, *c*' abrevia '(*a* Cmpr *b* . *a* Cmpr *c* . (*d*) (*d* Cmpr *b* . *d* Cmpr *c* :⊃: *d* Cmpr *a*))'.

Se puede postular, a este efecto, que dadas unas constantes predicativas cualesquiera *b* y *c*, existe por lo menos una suma semántica de *b* y *c*. Después será fácil demostrar que las sumas semánticas poseen las propiedades formales adecuadas.

De un modo semejante, se dice que una expresión *a* es el *producto semántico* de las expresiones *b* y *c* si y sólo si tanto *b* como *c* comprenden *a*, y cada *d* que comprenden tanto *b* como *c* está también comprendida por *a*.

'*a* Prod *b*,*c*' abrevia '(*b* Cmpr *a* . *c* Cmpr *a* . (*d*) (*b* Cmpr *d* . *c* Cmpr *d* :⊃: *a* Cmpr *d*))'.

El producto de dos constantes predicativas denota tan sólo los objetos denotados por ambas. Postularemos la existencia de por lo menos un producto semántico de dos constantes predicativas cualesquiera, y las leyes formales concernientes a estos productos serán demostrables.

Por último, podemos decir que una expresión *a* es una ***negación semántica*** de *b* si y sólo si, para todo *c*, *a* y *b* comprenden ambas *c* si y sólo si *c* es nula, y para todo *c*, *c* comprende a la vez *a* y *b* si y sólo si *c* es universal.

'*a* Neg *b*' abrevia '((*c*) (*a* Cmpr *c* . *b* Cmpr *c* :≡: Nula *c*) . (*c*) (*c* Cmpr *a* . *c* Cmpr *b* :≡: Univ *c*))'.

De nuevo, se postulará la existencia de al menos una negación semántica de todas constantes predicativas, y las leyes formales que se refieran a estas negaciones serán demostrables.

Es un poco difícil indicar a esta altura la utilidad de estos conceptos en una semántica intraducente. En particular, ayudan a compensar la escasez de los medios de expresión disponibles: el concepto de *Suma* nos permite manejar las proposiciones del lenguaje objeto de la forma de las disyunciones materiales, el de *Prod* las de la forma de las conyunciones, y el de *Neg*, las de la forma de las negaciones.

Tan importante como los anteriores es el concepto de la ***implicación semántica*** de constantes predicativas, que se introducirá en el próximo capítulo.

C. Verdad

Estamos ahora capacitados para definir el concepto semántico de verdad para *L* en MS_o^L: puede darse éste de cualquiera de las cuatro maneras tratadas en (V, §§A y B). En realidad, podemos considerar ahora que estas cuatro definiciones lo son de MS_o^L. El definiens de cada una de ellas contiene 'Univ' de una manera esencial, que ahora habremos de considerar definida a base de la comprensión, como anteriormente, en vez de a partir de la denotación múltiple, como en (IV, C).

Uno de los rasgos más importantes de la semántica intraducente es que para la definición de verdad debe abandonarse el requisito de adecuación. La razón es que ni siquiera cabe enunciarle para el sistema formal MS_o^L, ya que éste contiene tan sólo descripciones estructurales, y no traducciones de las expresiones de *L*. Establecer la necesidad de adecuación presupone que en el metalenguaje semántico se tienen unas y otras a la vez, o sea, que se pueden a la vez mencionar y utilizar las expresiones del lenguaje objeto, como hemos indicado en (V,C).

En cierto sentido, a las definiciones de verdad no ha de exigírselas aquí adecuación, pero aquéllas están claramente *de acuerdo* con éstas: en otras palabras, el significado dado al elemento primitivo 'Cmpr' es tal que el concepto de verdad resultante es esencialmente el que tendría un sistema formal en el cual la condición de adecuación pudiese ser establecida y demostrada con toda generalidad. No se trata de que neguemos aquí la adecuación de ninguna manera, ni tampoco de que supongamos su negación: no se puede demostrar explícitamente que los conceptos de verdad definidos estén claramente de acuerdo con ella; para afirmarlo hemos de apoyarnos en nuestra intuición del significado preciso de 'Cmpr'. (Véase luego (XII, G).)

Para los fines del desarrollo subsiguiente en este capítulo y en los capítulos IX y X, consideraremos que el concepto de verdad está definido por la cuarta de estas definiciones, correspondiente a la (V) de (V, B), a partir de abstractos vacíos. No nos referiremos en lo sucesivo a las otras definiciones de verdad, por no necesitarlas para los fines presentes. (Las diferentes definiciones de verdad son, sin embargo, equivalentes entre sí, aunque no daremos demostración de esto. De todas maneras véase *TD17* en el capítulo IX).

D. Reglas generales de la comprensión

Las reglas de MS_O^L se pueden dividir en tres grupos: (i) reglas lógicas, (ii) reglas sintácticas, y (iii) reglas semánticas. Las reglas lógicas son las que se dieron anteriormente en (III, B), que proporcionan un sistema lingüístico de primer orden, con inclusión de la identidad, simple y aplicado. Las reglas sintácticas comprenden *RSin1*-*RSin3* de (III, B), pero abandonamos la Regla de inducción infinita, *RSin4*; en su lugar tomamos dos de sus consecuencias, la Regla de ingredientes enmarcados, *TG4* (III), y la Regla de las expresiones, *TG13* (III). (Recordemos que utilizando éstas podemos demostrar la Regla de inducción *TG14* y con ella los diversos teoremas de (III, C).) Al abandonar *RSin4* no debilitamos de modo apreciable la sintaxis de *L*, y esta regla no es necesaria para los fines semánticos que aquí nos proponemos alcanzar.

Las reglas semánticas de MS_O^L, las *Reglas generales de la comprensión*, estipulan propiedades de las constantes predicativas que no dependen en modo alguno del carácter específico del lenguaje objeto: son generales en tanto se aplican por igual a todos los lenguajes de los que ahora tratamos; no establecen qué constantes predicativas del lenguaje objeto comprenden a cuáles. Naturalmente, algunas constantes predicativas de *L* comprenderán otras en virtud únicamente de la lógica subyacente: esto se seguirá de las Reglas generales; pero las propiedades de la comprensión que de algún modo tengan como base o reflejen el carácter de los axiomas o teoremas no lógicos del lenguaje objeto, no podrán ser establecidas utilizando simplemente las Reglas generales; ello deberá hacerse de otra manera (Véase (IX, E).)

Las Reglas generales de la comprensión son como sigue. La primera, la *Regla de las expresiones denotadoras*, ya ha sido mencionada antes.

RGC1. $\vdash$ ED a . $\equiv$. ConsPred a.

Tenemos también una *Regla de transitividad.*

RGC2. $\vdash$ a Cmpr b . c Cmpr a :$\supset$: c Cmpr b.

Ya se ha dicho que, dadas dos constantes predicado cualesquiera a y b, debe existir por lo menos una suma semántica de a y b. En vez de postular esto directamente, admitiremos que cuando a, b y c sean expresiones relacionadas semánticamente de algún modo, a sea la suma semántica de b y c. Supongamos que existen una b', una c' y una d tales que b' sea una función proposicional de la variable única d, b sea $(d \frown epinv \frown b')$, c' sea una función proposicional de la variable única d, c

sea ($d \frown epinv \frown c'$), y a sea ($d \frown epinv \frown$ (b' *uve* c')). En estas circunstancias estipulamos que a es una suma semántica de b y c, lo cual viene dado por la *Regla de la suma.*

RGC3. $\vdash$ (Eb') (Ec') (Ed) (FuncPropUna b',d. FuncPropUna c', d. b= ($d \frown epinv \frown b'$) . c = ($d \frown epinv \frown c'$) . a = ($d \frown epinv \frown$ (b' *uve* c'))) . $\supset$. a Sum b,c.

Gracias a esta regla obtenemos cierta correspondencia entre los conceptos contenidos en '*uve*' y 'Sum'.

Se postula un principio análogo referente a los productos semánticos. Recordemos que '(*a punto b*)' se definía en (III, D) como '*tilde a uve tilde b*)'. La correspondencia que exigimos entre el concepto contenido en '*punto*' y 'Prod' es parecida a la existente entre '*uve*' y 'Sum', y está dada por la siguiente *Regla del producto:*

RGC4. $\vdash$ (Eb') (Ec') (Ed) (FuncPropUna b',d . FuncPropUna c',d . b = ($d \frown epinv \frown b'$) . c = ($d \frown epinv \frown c'$) . a = ($d \frown epinv \frown$(b' *punto* c'))) . $\supset$. a Prod b,c.

Hace falta una *Regla de negación* para dar las circunstancias en las cuales una constante predicado es la negación semántica de otra; esto nos dará la correspondencia que queremos exista entre '*tilde*' y 'Neg'.

RGC5. $\vdash$ (Ec) (Ed) (FuncPropUna c,d . a = ($d \frown epinv \frown c$) . b = ($d \frown$ *epinv* $\frown$ *tilde* $\frown c$)) . $\supset$. b Neg a.

Obsérvese que las fórmulas que son esencialmente las inversas de los axiomas estipulados por *RGC3*, *RGC4* y *RGC5*, no son válidas. Por ejemplo, b puede ser una negación de a en el sentido definido cuando b y a no estén relacionados del modo que requiere la hipótesis de *RGC5;* y 'x ɜ $\sim$Px' es una negación semántica de 'x ɜ (Px v $\sim$Px))', por ejemplo, a pesar de que estos dos abstractos no están relacionados de la manera exigida por la hipótesis.

La próxima regla, la *Regla de los productos semánticos no nulos*, nos da una condición suficiente para que un producto semántico sea no nulo.

RGC6. $\vdash$ d Neg b . c Prod a, d . $\sim b$ Cmpr a :$\supset$: $\sim$Nula c.

Este principio es necesario para fines técnicos, especialmente para la demostración de una ley distributiva.

También se necesita una regla referente a los productos semánticamente nulos con un factor común, la *Regla de los productos semánticamente nulos.*

RGC7. $\vdash$ d Sum a,b . d Cmpr c . (e) (c Cmpr e . (a Cmpr e .v. b Cmpr e) :$\supset$: Nula e) :$\supset$: Nula c.

Esta regla también es necesaria para fines técnicos, sobre todo para la demostración de una ley distributiva.

La siguiente Regla general, *RGC8*, es de carácter algo diferente: las reglas precedentes habían estipulado ciertas propiedades generales de la comprensión[1]; la siguiente establece, en cambio, que ciertas constantes predicativas son universales. Esta regla es general, ya que es válida para todos los lenguajes L del tipo que estudiamos y no depende en

[1] *RGC2*-*RGC7* se asemejan de hecho a algunos de los postulados de inclusión de TARSKI para el álgebra booleana. Ver su «Grundzüge der Boole'schen Algebra I», en particular pp. 181-2.

modo alguno de la estructura axiomática específica de L; su finalidad es permitirnos mostrar que cualquier *axioma lógico* de L (a condición de que sea una proposición) o cualquier clausura del mismo, es verdadero en sentido apropiado.

RGC8. $\vdash$ (Ec) (a Clau' c . AxLog c) . Vbl b :$\supset$: Univ ($b \frown epinv \frown a$),

También se necesita una regla para discriminar propiamente las constantes predicado universal y nula, la *Regla de discriminación.*

RGC9. $\vdash$ Univ a . Nula b :$\supset$: $\sim b$ Cmpr a.

Se sigue de esta regla que las constantes predicado universales y nulas no son coextensas. (Adviértase que la regla no estipula que existan cosas tales como constantes predicativas universales: esto debe demostrarse de alguna otra manera).

La definición de verdad que se utilizará en el desarrollo subsiguiente es la establecida a base de abstractos vacíos. Para fijar explícitamente las propiedades semánticas de éstos, se necesitan tres *Reglas de abstractos vacíos.* La primera relaciona los abstractos (posiblemente) vacíos con los (posiblemente) no vacíos, de determinada manera.

RGC10. $\vdash$ FuncPropUna b,a . Vbl c . Univ ($a \frown epinv \frown b$) :$\supset$: Univ ($a \frown epinv \frown c$ *cu* b).

Lo que constituye esencialmente la fórmula inversa de *RGC10* es demostrable (véase (IX, D), *TD18*).

La segunda regla estipula que todo abstracto vacío ($b \frown epinv \frown a$) comprende cualquier abstracto vacío ($c \frown epinv \frown a$), siendo b y c variables distintas.

RGC11. $\vdash$ Prop a . Vbl b . Vbl c . $\sim b = c$:$\supset$: ($b \frown epinv \frown a$) Cmpr ($c \frown epinv \frown a$).

Una consecuencia inmediata de *GRC11* es que los abstractos que nos interesan son coextensos.

La tercera Regla de los abstractos vacíos estipula que cualquier abstracto vacío es o bien universal o bien nulo.

RGC12. $\vdash$ Prop a . Vbl b :$\supset$: Univ ($b \frown epinv \frown a$) .v. Nula ($b \frown epinv \frown a$).

Gracias a esta regla podemos demostrar que, dada una proposición a de L, o a o su negación son verdaderas.

También necesitamos una regla estrechamente relacionada con *RGC11*, pero referente a los abstractos no vacíos. Esta *Regla de las variables abstractas ligadas* equivale a una regla para volver a escribir las variables ligadas en abstractos no vacíos.

RGC13. $\vdash$ FuncPropUna a,b . b VLb a . d SLb$^{\varepsilon}_{\upsilon}$ a . $\sim b = c$:$\supset$: ($b \frown epinv \frown a$) Cmpr ($c \frown epinv \frown d$).

Finalmente, admitimos que las constantes predicativas primitivas monádicas de L son coextensas con ciertos abstractos. Tomando L como en el capítulo II (pero sin constantes primitivas individuales o funcionales), recordamos que 'P' es la única constante predicativa primitiva monádica. Por tanto, basta con admitir lo siguiente:

RGC14. $\vdash$ *pe* CoExt (*qis* $\frown$ *epinv* $\frown$ *pe* $\frown$ *qis*).

Esto completa la lista de las Reglas generales de la comprensión; en (IX, G), demostraremos la coherencia de estas reglas con relación a las reglas lógicas y sintácticas de MS^{L}_{υ}.

Si hubiésemos de definir 'Cmpr' en MS_D^L como en (IV, C) así como 'Sum', 'Prod', etc. comprobaríamos que de hecho son demostrables en MS_D^L reglas análogas a *RGC2-RGC-14*. En MS_D^L no introdujimos formalmente el concepto de *expresión denotadora;* podríamos haberlo hecho, sin embargo, definiendo

'ED *a*' como 'ConsPred *a*'

Entonces la regla análoga a *RGC1* se deduciría inmediatamente; no dimos estas reglas en la exposición de MS_D^L, porque eran relativamente poco importantes: allí no forman sino un fragmento de una teoría mucho más rica. Ahora nuestra tarea consiste en mostrar que estos principios son suficientes para alcanzar los fines semánticos que nos hemos propuesto.

E. Diversas bases posibles

'Cmpr' se ha tomado anteriormente como único elemento primitivo semántico de la semántica intraducente. Ahora consideraremos otros varios elementos primitivos posibles.

Se ve fácilmente que 'Cmpr' no es simétrico, es decir, que podemos demostrar fundándonos en *RGC1-RGC14*, que

$$\vdash \sim (a)\,(a \text{ Cmpr } b \;.\supset.\; b \text{ Cmpr } a),$$

ya que por *RGC9* tenemos que

$$\vdash \text{Univ } a \;.\; \text{Nula } b \;.\; a \text{ Cmpr } b :\supset: \sim b \text{ Cmpr } a,$$

y de aquí

$$\vdash (Ea)\,(Eb)\,(a \text{ Cmpr } b \;.\; \sim b \text{ Cmpr } a),$$

siempre que

$$\vdash (Ea)\,(Eb)\,(\text{Univ } a \;.\; \text{Nula } b \;.\; a \text{ Cmpr } b).$$

(Véase *TB6* en (IX,B)). Los predicados primitivos diádicos que son simétricos se suelen preferir a los que no lo son [1]; de aquí que tenga interés el considerar también los elementos primitivos simétricos de alcance definitorio determinado. No hace falta buscar muy lejos estos predicados. Expresemos por 'O' la relación de *solapamiento semántico*: '*a* O *b*' se da cuando *a* y *b* son ambas constantes predicativas de *L* que denotan (en el sentido de denotación múltiple) al menos un objeto en común. O, también, expresemos por '$\int$' la relación de ser *semánticamente discreto*, de manera que '$a \int b$' sea cierto si *a* y *b* son dos constantes predicativas de *L* que *no* denotan *ningún* objeto en común [2]. Ambos predicados son simétricos y tanto uno como otro pueden ser tomados como primitivos en lugar de 'Cmpr'.

'Cmpr' puede definirse a base de 'O'.

'*a* Cmpr *b*' puede abreviar '(ConsPred *a* . ConsPred *b* . (*c*) (*c* O *b* . $\supset$. *c* O *a*))', de forma que fundándose en 'O' se pueden definir todos los

[1] Véase N. Goodman, «The Logical Simplicity of Predicates», *The Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), pp. 32-41, y «An Improvement in the Theory of Simplicity», *ibid.*, pp. 228-9. También *The Structure of Appearance*, pp. 59-75.

[2] Los símbolos de solapamiento y discreción semánticos son los usados por Goodman para los conceptos correspondientes del cálculo de individuos. Cf. *The Structure Of Appearance*, pp. 43-4.

conceptos de la semántica intraducente. En vez de limitarnos a reemplazar las frases de la forma '*a* Cmpr *b*' por sus definientia a partir de 'O' en las definiciones de los parágrafos anteriores, debemos buscar otras más directas; y de la misma manera, en los desarrollos primitivos de *RGC-RG14*, no debemos limitarnos a reemplazar frases de la forma '*a* Cmpr *b*' por sus definientia a base de 'O', sino buscar reglas más directas a base de 'O'. Advertencias semejantes se aplican a una semántica intraducente basada en la discreción semántica.

Hemos elegido aquí 'Cmpr' como elemento primitivo semántico, no porque sea el «mejor» elemento primitivo en algún sentido intituitivo, sino porque resulta rápido disponer de las reglas que a él se refieren. Estas reglas, como indicaremos en el capítulo siguiente, proporcionan directamente un álgebra booleana basada en la inclusión. El carácter de la semántica intraducente como álgebra booleana de la inclusión fundamentada en la sintaxis elemental aparece así claramente; el que esta semántica pueda considerarse simplemente como un álgebra ampliada tal vez no se ha reconocido hasta ahora.

Con *RGC1-RGC14* es muy probable que quepa demostrar todos los axiomas que pudiéramos adoptar para la caracterización de cualquiera de estos diversos elementos primitivos posibles (y viceversa, si estos axiomas han de bastar para establecer la teoría). Por lo tanto, es de suponer que estas diversas maneras de formular la semántica intraducente sean equivalentes.

También podemos tomar como elementos primitivos determinados predicados semánticos *monádicos*. En primer lugar, supongamos que se toma como único elemento primitivo semántico un 'Vrd' intraducente y se le caracteriza mediante axiomas apropiados. Tales axiomas podrían seguramente demostrarse en MS^{L}_{O}; pero 'Cmpr' puede definirse a base de 'Vrd' como sigue:

'*a* Cmpr *b*' abrevia '(ConsPred *a* . ConsPred *b* . Vrd (*qis cu* (*b*⌢*qis dscd a*⌢*qis*)))' [1].

Luego, con unos axiomas convenientemente escogidos para 'Vrd', *RGC1-RGC14* aparecerían probablemente sin tardar como teoremas de este metalenguaje. Así, los dos metalenguajes serían también equivalentes aquí.

Otra posibilidad consiste en tomar 'Univ' como elemento primitivo, en lugar de 'Vrd'. Es evidente que los dos pueden definirse entre sí, las definiciones de 'Vrd' a base de 'Univ' ya se han dado anteriormente: pero también

'Univ *a*' puede abreviar '(E*b*) (Vrd *b* . *a* S^{epinv}_{pd} *b* . PropUnivAt *b*)'.

De aquí que, fundándose en los axiomas convenientes para 'Univ' tomado como elemento primitivo, el metalenguaje fundado en 'Vrd' pueda mostrarse equivalente al fundado en 'Univ'.

Otra posibilidad se lograría tomando 'Nula' como único elemento primitivo semántico. En este caso,

'Univ *a*' puede abreviar '(E*b*) (E*c*) (E*d*) (Nula *b* . Vbl *c* . *b* = (*c*⌢ *epinv*⌢*d*) . *a* = (*c*⌢*epinv*⌢*tilde d*))'.

[1] El autor está en deuda con el profesor ALFRED TARSKI por esta definición particularmente sencilla.

Fundándose en los axiomas convenientes podría también mostrarse que el metalenguaje semántico fundado en 'Nula' es equivalente a los otros metalenguajes intraducentes.

Algunas de estas diversas formulaciones de la semántica intraducente son quizá más sencillas y, por ello, preferibles a otras. Pero todas las formulaciones son —es de suponer— equivalentes y proporcionan a *L* una semántica mínima, como veremos en (XIII,F).

Se continúa la exposición de la semántica intraducente en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IX

Semántica intraducente (II)

Los primeros apartados de este capítulo se dedican a resaltar las principales consecuencias de las Reglas generales de la comprensión: de esta manera obtendremos una visión más clara de la naturaleza exacta de MS^L_C. Aquí los teoremas son generales en el sentido de que convienen a cualquier lenguaje objeto L del tipo considerado. En (IV, E y F) se han citado ya teoremas análogos a algunos de éstos: tenían allí un papel relativamente secundario; pero en MS^L_C estos teoremas tienen gran importancia, pues ayudan a demostrar los teoremas básicos referentes al concepto de verdad. En la semántica intraducente, no admitimos los medios deductivos del lenguaje objeto; los teoremas de la teoría general de la comprensión remedian en cierto modo esta falta, y son una introducción necesaria a la teoría de la verdad (para un lenguaje objeto concreto).

Los últimos apartados del capítulo se refieren a las propiedades semánticas específicas de un lenguaje objeto particular: como lenguaje objeto escogemos el sistema S de Zermelo-Skolem expuesto en el capítulo VI. S es uno de los lenguajes de primer orden más importantes y de mayor alcance, por lo que tendrá interés especial el estudiar sus propiedades semánticas en un metalenguaje semántico intraducente muy estricto. Podemos presuponer que la semántica intraducente se ha formulado tomando S como lenguaje objeto: designaremos este metalenguaje semántico por MS^S_C.

La mayor parte de los teoremas mencionados o demostrados en los §§ A-B, son simples teoremas de un *álgebra booleana* de constantes predicativas en el sentido de (IV, F); muchos de ellos serán útiles en los últimos párrafos del capítulo y aun en lo siguiente. El concepto de *implicación semántica* de constantes predicativas se introduce en el § C, y en el § D se demuestran importantes *teoremas semánticos referentes a la verdad.* Para determinar las propiedades semánticas específicas de S se necesitan ciertos *supuestos adicionales*, que se tratarán en el § E. En el § F se demostrará que, bajo hipótesis adecuadas, todo teorema de S que sea también una proposición, será verdadero en el sentido apropiado (este teorema, como ya sabemos, es esencial para demostrar la coherencia semántica de S.) Finalmente, el § G se consagra a demostrar la *coherencia* de la semántica intraducente con relación a la coherencia de la lógica y la sintaxis subyacentes.

A. Algebra booleana

Ya hemos dicho que la teoría general de la comprensión consiste esencialmente en una sintaxis elemental, junto con un álgebra booleana de las constantes predicativas. Para verificar esto, basta advertir que los diferentes teoremas de un álgebra booleana son demostrables en MS_0^L. En particular, podemos demostrar teoremas análogos a los de (IV,F) muy brevemente, como sigue.

Sea F cualquier abstracto (monádico) de MS_0^L que no contenga de un modo primitivo apariciones de '$\frown$', de '=' ni de ninguna otra constante descriptiva estructural; luego F contendrá de un modo primitivo únicamente variables de expresión, paréntesis, símbolos de las funciones veritativas, 'ε', y 'Cmpr'. Podemos decir que semejante abstracto F es un abstracto *puramente semántico*. Una ley general de coextensividad es como sigue:

TA1. $\vdash a$ CoEx $b :\supset:$ Fa . $\equiv$. Fb, si F es un abstracto puramente semántico.

La demostración se hace por inducción (en el metalenguajede MS_0^L).

Obtenemos a partir de *RGC13* otra ley de coextensividad.

TA2. $\vdash$ FuncPropUna a,b . c SLb$_b^a$ a . b VLb $a :\supset:$ ($b\frown epinv\frown a$) CoExt ($d\frown epinv\frown c$).

Por *RGC13* tenemos que:

$\vdash$ FuncPropUna a,b c SLb$_b^a$ a . b VLb a . $\sim d = b$. FuncPropUna c,d . a SLb$_d^b$ c . d VLb $c :\supset:$ ($b\frown epinv\frown a$) CoExt ($d\frown epinv\frown c$).

Pero por *TG8j* (III), obtenemos *TA2* a condición de que $\sim b = d$; pero *TA2* es inmediato a condición de que $b = d$, utilizando *TG8l* (III), y de ahí el teorema.

También tenemos *TA2* sin la hipótesis 'b VLb a'.

TA3. $\vdash$ FuncPropUna a,b . c SLb$_b^a$ $a :\supset:$ ($b\frown epinv\frown a$) CoExt ($d\frown epinv\frown c$).

La demostración se basa en *TA2* y *RGC11*.

Evidentemente, podemos demostrar las leyes requeridas referentes a las sumas semánticas, en particular, a la ley de existencia y unicidad (dentro de la coextensividad), *TF4* (IV); la demostración se hace según *RGC3*, *TA3*, y *TA1*. E, igualmente, para los productos se demuestra la ley *TF7* (IV).

De la misma manera tenemos las leyes siguientes referentes a la negación semántica.

TA4. $\vdash$ ConsPred a . $\supset$. (Eb) (ConsPred b . b Neg a).

(Se apoya en *RGC5*).

TA5. $\vdash$ b Neg a . c Prod $a,b :\supset:$ Nula c.

La ley de reflexibilidad para Sub, *TF1* (IV), puede demostrarse aquí por *RGC6*, *TF7* (IV), *TA4* y *TA5*. La ley de transitividad para Sub, *TF2* (IV), es inmediata según *RGC2*. También *TF3*, *TF5*, *TF6*, *TF8* y *TF9* del capítulo IV son inmediatas según las definiciones. Por *RGC8* y la sintaxis sabemos que

TA6. $\vdash$ (Ea) Univ a;

también que

TA7. $\vdash$ Univ a . a Sub $b :\supset:$ Univ b,

y, por tanto, que

TA8. $\vdash$ Univ a . Univ $b :\supset: a$ CoExt b.

Combinando *TA6* y *TA8* obtenemos *TF12* (IV), la ley de existencia y de unicidad de las contantes predicativas universales.

En cuanto a las constantes predicativas semánticamente nulas, tenemos las leyes siguientes:

TA9. $\vdash a$ Neg b . Univ $b :\supset:$ Nula a.

Luego, utilizando *TA4* y *TA6*, tenemos que

TA10. $\vdash$ (Eb) Nula b.

También

TA11. $\vdash$ Nula a . b Sub $a :\supset:$ Nula b,

y de aquí

TA12. $\vdash$ Nula a . Nula $b :\supset: a$ CoExt b.

Así obtenemos la ley de existencia y de unicidad de las constantes predicativas semánticamente nulas, *TF13* (IV).

Debe advertirse también que

TA13. $\vdash a$ Sum b,c .v. a Prod b,c .v. (a Neg b . ConsPred c) .v. ((Nula a .v. Univ a) . ConsPred b . ConsPred c) $:\supset:$ ConsPred a. ConsPred b . ConsPred c.

TF15 y *TF16* del capítulo IV son inmediatas, si se utilizan las definiciones y *TA5*.

Podemos establecer las leyes distributivas, *TF10* y *TF11* del capítulo IV, utilizando los lemas siguientes:

TA14. $\vdash c$ Prod $a,b :\supset:$ Nula c . $\equiv$. (d) (d Sub a . d Sub $b :\supset:$ Nula d) .

(Por *TA11*.)

TA15. $\vdash$ ConsPred a . ConsPred b . $\sim a$ Sub $b :\supset:$ (Ec) (c Sub a . $\sim c$ Sub b . (d) (d Sub c . d Sub $b :\supset:$ Nula d)).

La demostración utiliza *RGC6:* uno de los fines más importantes de *RGC6* es, en realidad, el de capacitarnos para demostrar este lema; su otro fin, como ya hemos visto, es permitirnos demostrar la ley de reflexividad para Sub.

TA16. $\vdash$ ConsPred a . ConsPred b . $\sim a$ Sub $b :\supset:$ (Ec) (Ed) ($\sim$Nula c . c Sub a . d Prod c,b . Nula d).

(En virtud de *TA14* y *TA15*.)

TA17. $\vdash d$ Sum a,b . c Sub d . e Prod c,a . e' Prod c,b . Nula e . Nula $e' :\supset:$ Nula c.

La demostración se apoya en *RGC7* y *TA14*.

Utilizando *TA16*, *TA17*, y *TA1* podemos establecer la ley distributiva *TF10* (IV). La otra ley distributiva, *TF11* (IV), se deduce entonces también.

Finalmente, podemos establecer las leyes siguientes, que nos llevan a la ley de unicidad para Neg.

TA18. $\vdash a$ Neg b . c Neg b . d Sum $a,b :\supset: d$ Sum c,b.

TA19. $\vdash d$ Sum a,b . d Sum c,b . e Prod a,b . Nula e . e Prod $c,b :\supset: a$ CoExt e.

cuya demostración es un poco laboriosa.

Podemos demostrar ahora *TF14* (IV) (la ley de existencia y unicidad para Neg) utilizando también *TA4*.

B. Algunos teoremas ulteriores

Indicamos ahora unos cuantos teoremas más, algunos de ellos son simplemente leyes booleanas que serán necesarias en lo sucesivo.

A causa de su importancia para una demostración posterior puede enunciarse como teorema lo que sigue.

TB1. $\vdash$ FuncPropUna b',d . $b = (d \frown epinv \frown b')$. FuncPropUna c',e . $c = (e \frown epinv \frown c')$. d' $SLb^{d}_{e} c'$. $a = (d \frown epinv \frown (b' \; uve \; d'))$:$\supset$: a Sum b,c.

La demostración emplea *TG9a* (III), *RGC3*, *TA3* y *TA1*. Existe una ley análoga para los productos.

Dadas unas constantes predicado cualesquiera, b y c, no tenemos hasta ahora derecho a hablar de *la* suma o producto de b y c. Hemos demostrado tan sólo que existía *por lo menos una* suma o *un* producto; pero, en realidad, hay una multitud de sumas o productos. Tenemos, pues, que

$\vdash$ ConsPred a . ConsPred b :$\supset$: (Ec) (Ed) ($\sim c = d$. c Sum a,b . d Sum a,b).

y análogamente para los productos. En realidad, dado cualquier número finito n, podemos demostrar que existen por lo menos n sumas (o productos) distintos de a y b: la razón es que siempre podremos formar una nueva suma (o producto) tan sólo con alterar el abstracto. Por ejemplo, si c es 'x ɜ ---x---', en donde c Sum a, b, podemos establecer que d es 'x(---x--- . $x = x$)'. Evidentemente $\sim d = c$, aunque ambas sean sumas de a y b; y lo mismo ocurre para los productos. Las demostraciones de estos enunciados se darán en el § D, ya que requieren varias leyes que serán demostradas más adelante (véase *TD25*).

Vamos a enumerar ahora algunas leyes booleanas adicionales útiles.

TB2. $\vdash$ Nula b . c Sum a,b :$\supset$: c CoExt a,

TB3. $\vdash$ Nula b . c Prod a,b :$\supset$: c CoExt b,

TB4. $\vdash$ a Neg b .$\supset$. b Neg a,

TB5. $\vdash$ a Neg b . Nula b :$\supset$: Univ a,

TB6. $\vdash$ Univ a . Nula b :$\supset$: b Sub a,

TB7. $\vdash$ Univ a . Nula b :$\supset$: $\sim a$ CoExt b,

TB8. $\vdash$ (Ea) (Eb) ($\sim a$ CoExt b . ConsPred a . ConsPred b),

y

TB9. $\vdash$ Nula a .$\supset$. $\sim$Univ a.

Se podría considerar conveniente desarrollar una notación más clara para las sumas, productos y negaciones semánticos. En vez de atribuir cierta propiedad a a bajo la *hipótesis* de que a sea una suma semántica de b y c, podríamos querer introducir cierta notación, digamos '(b + c)', para esta suma semántica, y después atribuir la propiedad directamente a esta suma. Esto puede hacerse como sigue, utilizando el concepto de descripción selectiva introducido en (II, F). Definamos

'(a + b)' como '(ɛc.c Sum a,b)',
'(a.b)' como '(ɛc.c Prod a,b)',

y

'—a' como '(ɛc.c Neg a)'.

'$(a + b)$' puede leerse 'cualquier suma escogida de a y b'. Algo análogo puede decirse de las otras relaciones. Podemos demostrar ahora las leyes referentes a las sumas, etc., presuponiendo las leyes ya indicadas anteriormente. Así, haremos ver que

$\vdash$ ConsPred a . ConsPred b :$\supset$: $(a+b)[(b+a)[(a+b)$ CoExt $(b+a)]]$.

Utilizando la definición de (II, F), esto puede escribirse como sigue.

$\vdash$ ConsPred a . ConsPred b :$\supset$: (Ec)c Sum a,b . (c)(c Sum a,b :$\supset$: (Ed) d Sum b,a . (d)(d Sum b,a .$\supset$. c CoExt d)).

La demostración se lleva a cabo utilizando las leyes asociativa y de existencia de las sumas semánticas.

Aunque al utilizar las descripciones selectivas de esta manera ganamos en claridad de notación, las demostraciones se hacen más largas y presuponen los teoremas ya considerados; de aquí que no se pueda sacar gran partido de utilizar esta notación por doquier. Sin embargo, estas definiciones tienen el interés de ilustrar uno de los usos del 'ε' de Hilbert, que figurará también de una manera importante en algunos desarrollos posteriores comprendidos en (XII, F).

C. Implicación semántica de constantes predicativas

Debido al importante papel que desempeña el condicional material en el lenguaje objeto, el concepto semántico correspondiente de *implexión* (o *implicación) de constantes predicativas* merece una mención especial.

Decimos que una expresión a es una *expresión implicación semántica* (*implex*) [1] de b con c, si y sólo si existe una expresión d tal que d sea una negación semántica de b y a una suma semántica de d y c.

'a Imp b, c' abrevia '(Ed) (d Neg b . a Sum d, c)'.

Esta definición es análoga a la definición *D1*, en (II, A), del condicional material a partir de la disyunción y la negación. El concepto de implicación semántica de las constantes predicado será especialmente útil en relación con el concepto de verdad aplicado a proposiciones de la forma de condicionales materiales.

Para la implicación semántica tenemos, en primer lugar, una ley que se refiere a los elementos que relaciona.

TC1. $\vdash$ a Imp b,c :$\supset$: ConsPred a . ConsPred b . ConsPred c.

(Ley que se sigue de leyes referentes a Sum y Neg.).

Igual que en el caso de Sum, Prod, y Neg, tenemos leyes de existencia y unicidad para Imp.

TC2. $\vdash$ ConsPred b . ConsPred c :$\supset$: (Ea)a Imp b,c.

TC3. $\vdash$ a Imp b,c . d Imp b,c :$\supset$: a CoExt d.

Las demostraciones se hacen según teoremas referentes a las negaciones y sumas semánticas.

Posiblemente, la ley más útil de las que se refieren a la implicación

[1] La palabra 'implex' se debe a Quine. Véase su *A System of Logistic* (Harvard University Press, Cambridge, 1934), p. 91. El uso que le daba Quine difería, de todas maneras, del presente uso semántico.

de las constantes predicativas es la de que, cuando *a* es una implexión de *b* con *c* y *a* y *b* son ambas universales, *c* también es universal. Esta ley tiene cierta analogía con la regla del *Modus Ponens* referente al condicional material, y, en realidad, será útil en relación con esta última, como consignaremos más adelante (*TD7*).

TC4. ⊢ *a* Imp *b,c* . Univ *a* . Univ *b* :⊃: Univ *c*.

La prueba se hace mediante algunas leyes booleanas.

Otras leyes útiles referentes a la implicación semántica son las siguientes:

TC5. ⊢ FuncPropUna *c,b* . FuncPropUna *d,b* . *a* = (*b*∧*epinv*∧(*c dscd d*)) . *c'* = (*b*∧*epinv*∧*c*) . *d'* = (*b*∧*epinv*∧*d*) :⊃: *a* Imp *c',d'*.

TC6. ⊢ (E*b'*) (E*c'*) (E*d*) (E*d'*) (E*e*) (FuncPropUna *b'd*, . FuncPropUna *c',e* . *b* = (*d*∧*epinv*∧*b'*) . *c* = (*e*∧*epinv*∧*c'*) . *d'* SLb_e^a *c'* . *a* = (*d*∧*epinv*∧(*b' dscd d'*))) . ⊃ . *a* Imp *b,c*.

TC7. ⊢ FuncPropUna *b,a* . FuncPropUna *c,a* :⊃: Univ (*a*∧*epinv*∧(*b dscd c*)) . ≡ . (*a*∧*epinv*∧*c*) Cmpr (*a*∧*epinv*∧*b*).

Continuamos con algunos teoremas de la teoría de la verdad que no dependen en modo alguno de las reglas no lógicas de *L*. Muchos de ellos ya se han demostrado anteriormente en MS_D^L: allí dependían de la Regla de adecuación; en MS_C^L, que carece de esta Regla, deberán demostrarse a partir de *RGC1-RGC14* de una manera completamente diferente; debido a la importancia de estos teoremas en la semántica intraducente, daremos las demostraciones con algún detalle.

D. Teoremas lógicos y verdad

Una consecuencia inmediata de *RGC8* es que todos los axiomas lógicos de *L* (que sean también proposiciones) y las clausuras de los mismos, son verdaderos en el sentido de la definición a partir de abstractos vacíos ((V, B) y (VIII, C)); luego podemos demostrar también que todos los teoremas lógicos de *L* que sean proposiciones serán verdaderos. En este parágrafo demostraremos estos dos teoremas básicos en MS_C^L, así como otros importantes teoremas referentes a la verdad.

TD1. ⊢ AxLog *a* :⊃: (E*b*) (*b* Clau' *a* . Vrd *b*).

La demostración se hace por *RGC8*.

Como consecuencia de *RGC12* tenemos que

TD2a. ⊢ Prop *a* . Vbl *b* :⊃: Univ (*b*∧*epinv*∧*a*) .v. Univ (*b*∧*epinv*∧*tilde a*),

(empleando *TB5* y *RGC5*).

Utilizando *TD2a*, podemos demostrar inmediatamente que, dada una proposición *a*, o bien es verdadera, o bien lo es su negación.

TD2b. ⊢ Prop *a* :⊃: Vrd *a* .v. Vrd (*tilde a*).

Ya que tenemos en primer lugar que, por la definición de 'Vrd',

⊢ Prop *a* .v. Vbl *b* . ∼Vrd *a* :⊃: ∼Univ (*b*∧*epinv*∧*a*).

Luego por *TD2a*,

⊢ Prop *a* . Vbl *b* . ∼Vrd *a* :⊃: Vbl *b* . Univ (*b*∧*epinv*∧*tilde*∧*a*).

De aquí el teorema, en virtud de *TG8e* (III).

El teorema siguiente nos da una importante propiedad de la abstracción vacía.

TD3. ⊢ Prop *a* . Vbl *b* . Vbl *c* . ~*b* = *c* . Univ (*b*⌢*epinv*⌢*a*) :⊃: Univ (*c*⌢*epinv*⌢*a*).

La demostración es inmediata si se utilizan *RGC11* y *TA7.*

El teorema siguiente establece que cualquier proposición *a* es falsa (no verdadera) si y sólo si (*tilde a*) es verdadera.

TD4. ⊢ Prop *a* :⊃: ~Vrd . ≡ . Vrd (*tilde a*).

Una consecuencia inmediata de *TD2b* es que

(1) ⊢ Prop *a* :⊃: ~Vrd *a* . ⊃ . Vrd (*tilde a*).

De aquí que sólo necesitemos demostrar que

(2) ⊢ Prop *a* :⊃: Vrd (*tilde a*) . ⊃ . ~Vrd *a*.

Pero esto puede ser establecido sólo con advertir que, por *RGC5* y *TB4*

⊢ Prop *a* . Vbl *b* . Univ (*b*⌢*epinv*⌢*tilde a*). Prop (*tilde a*) :⊃: (*b*⌢*epinv*⌢*a*) Neg (*b*⌢*epinv*⌢*tilde a*).

Y, por tanto, al utilizar *TA9* y *TB9*,

⊢ Prop *a* . Vbl *b* . Univ (*b*⌢*epinv*⌢*tilde*⌢*a*). Prop (*tilde a*) :⊃: Prop *a* . Vbl *b*. ~Univ (*b*⌢*epinv*⌢*a*).

Aplicando ahora *TD3*, tenemos que

⊢ Prop *a* . Vrd (*tilde a*) :⊃: Prop *a* . (*c*) (Vbl *c* . ⊃ . ~Univ (*c*⌢*epinv*⌢*a*)).

De lo cual obtenemos (2), y de aquí el teorema.

Anotamos también otra consecuencia de *RGC12*, o más bien de *TD2a*, a saber que

TD5a. ⊢ Prop *a* . Vbl *b* . ~Univ (*b*⌢*epinv*⌢*a*) :⊃: Nula (*b*⌢*epinv*⌢*a*).

Por *TD2a*, *RGC5*, y *TB4*,

⊢ Hip :⊃: Univ (*b*⌢*epinv*⌢*tilde a*) . (*b*⌢*epinv*⌢*a*) Neg (*b*⌢*epinv*⌢*tilde a*).

('Hip' representa aquí 'hipótesis'. El uso debido, aquí y en todo el resto del libro, se aclarará gracias al contexto.) Luego, por *TA9*, obtenemos inmediatamente *TD5a.*

Asimismo, a partir de *TD5a* podemos demostrar que

TD5b. ⊢ Prop *a* . Vbl *b* . ~Vrd *a* :⊃: Nula (*b*⌢*epinv*⌢*a*).

Otro importante teorema referente al concepto de verdad es el principio según el cual si una disyunción (*a uve b*) de las proposiciones *a* y *b* es verdadera, por lo menos uno de sus miembros disyuntivos es verdadero.

TD6. ⊢ Prop *a* . Prop *b* . Vrd (*a uve b*) :⊃: Vrd *a* .v. Vrd *b*.

En primer lugar consideremos que, según *RGC3*,

(1) ⊢ Vbl *c* . Prop *a* . Prop *b* . Univ (*c*⌢*epinv*⌢(*a uve b*)). Prop (*a uve b* :⊃: (*c*⌢*epinv*⌢(*a uve b*)) Sum (*c*⌢*epinv*⌢*a*), (*c*⌢*epinv*⌢*b*). Univ (*c*⌢*epinv*⌢(*a uve b*)).

Supongamos que ~Vrd *a* y ~Vrd *b*. Entonces podemos demostrar según *TD5b* que

(2) ⊢ Hip (de (1)). ~Vrd *a* . ~Vrd *b* :⊃: (*c*⌢*epinv*⌢(*a uve b*)) Sum (*c*⌢*epinv*⌢*a*), (*c*⌢*epinv*⌢*b*). Nula (*c*⌢*epinv*⌢*a*) . Nula (*c*⌢*epinv*⌢*b*). Univ (*c*⌢*epinv*⌢(*a uve b*)).

Pero por *TB2* y *TA1* tendríamos entonces que

⊢ Hip (de (2)) . Concls (de (2)) :⊃: Nula ($c \frown epinv \frown (a\ uve\ b)$). Univ ($c \frown epinv \frown (a\ uve\ b)$).

(Es obvio que 'Concls' se toma aquí por 'conclusiones'). Hemos llegado a algo imposible según *TB9*, y de aquí el teorema.

Una consecuencia inmediata de *TD6* y *TD4* es la siguiente, que constituye el principio del *Modus Ponens* para el concepto de verdad.

TD7. ⊢ Vrd *a* . Vrd (*a dscd b*) :⊃: Vrd *b*.

Por *TD6*, tenemos que

⊢ Prop (*tilde a*) . Prop *b* . Vrd (*tilde a uve b*) .~Vrd (*tilde a*) :⊃: Vrd *b*.

Utilizando la definición de '*dscd*', *TD4*, *TG10a* (III), y *TG8e* (III), obtenemos el teorema. De igual manera tenemos el principio siguiente, que corresponde a la *Regla de generalización:*

TD8. ⊢ Vrd *a* . *b* Gen *a* :⊃: Vrd *b*.

Según *RGC10* tenemos que

⊢ Prop *a* . Vbl *c* . Univ ($c \frown epinv \frown a$) . Vbl *d* :⊃: Univ ($c \frown epinv \frown d\ cu\ a$),

de lo cual resulta que

⊢ Prop *a* . Vbl *c* . Univ ($c \frown epinv \frown a$) . Vbl *d* . *b* = (*d cu a*) :⊃: Prop *b* . Vbl *c* . Univ ($c \frown epinv \frown b$).

De aquí el teorema.

Combinando *TD7* y *TD8*, tenemos que si *a* y *b* son verdaderas y *c* es una consecuencia inmediata de ellas, *c* también es verdadera.

TD9. ⊢ Vrd *a* . Vrd *b* . *c* CI *a*, *b* :⊃: Vrd *c*.

Ahora ya estamos capacitados para demostrar el segundo teorema importante de este apartado, según el cual si *a* es una proposición y un teorema lógico de *L*, entonces es también verdadera en el sentido apropiado.

TD10. ⊢ Prop *a* . TeorLog *a* :⊃: Vrd *a*.

La demostración utiliza la Regla de ingredientes enmarcados, *TG4* (III), y es análoga a la de *TE5* (V).

Utilizando *TD10* y *TD7* podemos ahora establecer un teorema que es esencialmente el inverso del estipulado por *TD6*.

TD11. ⊢ (Vrd *a* . Prop *b*) .v. (Vrd *b* . Prop *a*) :⊃: Vrd (*a uve b*).

Por *TD7*,

⊢ Vrd *a* . (*a dscd* (*a uve b*)) :⊃: Vrd (*a uve b*).

Pero por *TD10*,

⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: Vrd (*a dscd* (*a uve b*)),

si advertimos que

⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: TeorLog (*a dscd* (*a uve b*)).

De aquí,

⊢ Prop *b* . Vrd *a* :⊃: Vrd (*a uve b*).

De un modo parecido podemos mostrar que

⊢ Prop *a* . Vrd *b* :⊃: Vrd (*a uve b*).

Combinando estos resultados obtenemos *TD11*.

Combinando T*D6* y *TD11* tenemos que

TD12. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: (Vrd *a* .v. Vrd *b*) . ≡ . Vrd (*a uve b*).

A partir de *TD12*, podemos demostrar inmediatamente con la ayuda de *TD4* que

TD13. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: (Vrd *a* . ⊃ . Vrd *b*) . ≡ . Vrd (*a dscd b*).
De aquí también,
TD14. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: (Vrd *a* . Vrd *b*) . ≡ . Vrd (*a punto b*),
y
TD15. ⊢ Prop *a* . Prop *b* :⊃: (Vrd *a* . ≡ . Vrd *b*) . ≡ . Vrd (*a triguión b*).

Combinando también *TD10* y *TD7* demostramos que
TD16. ⊢ Vrd *a* . TeorLog (*a dscd b*) . Prop *b* :⊃: Vrd *b*.

El teorema siguiente es particularmente interesante por mostrar que una proposición universal atómica '(*x*)---*x*---' de *L* es verdadera si y sólo si el abstractoc orrespondiente, '*x*ɜ---*x*---', es universal. Partiendo de ello podemos establecer inmediatamente que la verdad definida a partir de abstractos vacíos coincide con la verdad definida de otra cualquiera de las maneras mencionadas en (VIII, C), si se aplica a proposiciones universales atómicas.

TD17. ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* :⊃: Vrd (*a cu b*) . ≡ . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*).

Demostraremos esto en dos partes; primero que
(1) ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Vrd (*a cu b*) :⊃: Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*),
y luego que
(2) ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) :⊃: Vrd (*a cu b*).
Para la demostración de (1), advertimos que, según *TC5*,
(3) ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* :⊃: (*a*⌢*epinv*⌢(*a cu b dscd b*)) Imp (*a*⌢*epinv*⌢ *a cu b*), (*a*⌢*epinv*⌢*b*).

También sabemos que, utilizando *TD3* y la definición de 'Vrd',
(4) ⊢ Hip (de (1)) :⊃: Univ (*a*⌢*epinv*⌢*a*⌢*cu*⌢*b*).
Pero también, por sintaxis,
⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* :⊃: LogAx (*a cu b dscd b*).
Utilizando *RGC8* sabemos que
(5) ⊢ Hip (de (1)) :⊃: Univ (*a*⌢*epinv*⌢(*a cu b dscd b*)).
Combinando ahora (3), (4) y (5), y utilizando *TC4*, obtenemos (1). Ocupémonos ahora de (2). Utilizando *RGC10* y la definición de 'Vrd', tenemos inmediatamente que
(6) ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . *a* VLb *b* :⊃: Vrd (*a cu b*).
Pero también
(7) ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . ~*a* VLb *b* :⊃: Vrd (*b dscd a cu b*),
según *TD10*. También
(8) ⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . ~*a* VLb *b*: ⊃: Vrd *b*
ya que
⊢ Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . ⊃ . ConsPred (*a*⌢*epinv*⌢*b*),
según *TA13*, y por *TG8k* y *TG8b* de (III),
⊢ ConsPred (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . Vbl *a* . ~*a* VLb *b* : ⊃ : Prop *b*.
Combinando (7) y (8) y utilizando *TD7* tenemos que
⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . ~*a* VLb *b* :⊃: Vrd (*a cu b*).
Lo cual, con (6), lleva a (2), de forma que 'Vrd (*a cu b*)' se cumple bajo las hipótesis de (2), independientemente de que *a* sea una variable libre de *b* o no. Pero (2), junto con (1), nos da el teorema,

Una consecuencia de *TD17* es que

TD18. ⊢ FuncPropUna *b,a* : ⊃ : Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) . ≡ . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*a cu b*).

Por *RGC10*

(1) ⊢ FuncPropUna *b,a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*) : ⊃ : Univ (*a*⌢*epinv*⌢*a cu b*).

A la inversa, según *TD17*,

⊢ Prop (*a cu b*) . Vbl *a* . Vbl *c* . Univ (*c*⌢*epinv*⌢*a cu b*) : ⊃ : Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*),

y, por tanto,

(2) ⊢ FuncPropUna *b,a* . Univ (*a*⌢*epinv*⌢*a cu b*) : ⊃ : Univ (*a*⌢*epinv*⌢*b*).

Combinando (1) y (2) se obtiene el teorema.

El teorema siguiente relaciona el concepto de verdad que se aplica a las proposiciones bajo forma de condicionales universales, con la subsunción.

TD19. ⊢ FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* . Vrd (*c cu* (*dscd b*)) : ⊃ : (*c*⌢*epinv*⌢*a*) Sub (*c*⌢*epinv*⌢*b*).

Según *TD17*, sabemos que, dada la hipótesis, Univ (*c*⌢*epinv*⌢(*a dscd b*)); pero empleando después *TC7* obtenemos el teorema inmediatamente. Análogamente podemos demostrar que

TD20. ⊢ FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* . Vrd (*c cu* (*a triguión b*)) : ⊃ : (*c*⌢*epinv*⌢*a*) CoExt (*c*⌢*epinv*⌢*b*).

Los inversos de los teoremas estipulados en *TD19* y *TD20* también son ciertos; luego

TD21. ⊢ FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* : ⊃ : Vrd (*c cu* (*a dscd b*)) . ≡ . (*c*⌢*epinv*⌢*a*) Sub (*c*⌢*epinv*⌢*b*),

y

TD22. ⊢ FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* : ⊃ : Vrd (*c cu* (*a triguión b*)) . ≡ . (*c*⌢*epinv*⌢*a*) CoExt (*c*⌢*epinv*⌢*b*) [1].

También tenemos la siguiente ley de coextensividad:

TD23. ⊢ ConsPred *a* . Vbl *b* : ⊃ : *a* CoExt (*b*⌢*epinv*⌢*a*⌢*b*).

Según *RGC14*, *TA1* y *RGC13*, sabemos que

⊢ Vbl *b* : ⊃ : *pe* CoExt (*b*⌢*epinv*⌢*pe*⌢*b*).

Según *TD20* y *TD10* (recordando *Abst*) tenemos que

⊢ FuncPropUna *a,b* . *c* = (*b*⌢*epinv*⌢*a*) : ⊃ : *c* CoExt (*b*⌢*epinv*⌢*c*⌢*b*).

Utilizando de nuevo *RGC13* y combinando las dos últimas fórmulas, obtenemos el teorema.

---

[1] *TD21* tiene un interés especial, ya que nos da una propiedad del concepto de verdad aplicado a las proposiciones bajo forma de condicional universal. Es interesante comparar este teorema con un famoso pasaje de HOBBES, con cuya doctrina parece concordar. «Cuando dos nombres se alían en una consecuencia, o afirmación, como en *El hombre es una criatura viviente*, o en *si es un hombre, es una criatura viviente*, si el último nombre *criatura viviente* significa todo lo que significa el primero, *hombre*, la afirmación, o la consecuencia, es *verdadera*; de otra manera es *falsa*. Pues *Verdadero* y *Falso* son atributos del lenguaje, no de las cosas... Luego viendo que la *verdad* consiste en la correcta ordenación de los nombres en nuestras afirmaciones, un hombre que busca la *verdad* exacta, necesita recordar qué representa cada nombre que utiliza...» (HOBBES, *op. cit.*, p. 15). Según *TD21* un condicional universal es verdadero si y sólo si el «último nombre» comprende al primero.

Valiéndonos de *TD23*, *TA1* y *TD19* podemos demostrar también que

TD24. ⊢ ConsPred a . ConsPred b . Vbl c : ⊃ : b Cmpr a . ≡ . Vrd (c *cu* ($a \frown c$ *dscd* $b \frown c$)).

Ahora que tenemos *TD20* podemos demostrar también la ley según la cual si tenemos dos constantes predicado a y b, existen por lo menos dos sumas semánticas de a y b.

TD25. ⊢ ConsPred a . ConsPred b : ⊃ : (Ec)(Ed)(~c = d . c Sum a,b . d Sum a,b).

Utilizando *TB1* tenemos, en primer lugar, que

(1) ⊢ FuncPropUna b',d . b = ($d \frown epinv \frown b'$) . FuncPropUna $c',e.c$ = ($e \frown epinv \frown c'$) . d' SLb^d_e c' . a = ($d \frown epinv \frown (b'$ *uve* $d')$) : ⊃ : a Sum b,c.

Pero también, aplicando *TD10*,

(2) ⊢ FuncPropUna b',d . FuncPropUna d',d : ⊃ : Vrd (d *cu* (b' *uve* d') *triguión* d *cu* ((b' *uve* d') *punto* (b' *uve tilde* b'))).

Luego, mediante *TD20*,

⊢ Hip (de (2)) : ⊃ : ($d \frown epinv \frown (b'$ *uve* $d')$) CoExt ($d \frown epinv \frown ((b'$ *uve* $d')$ *punto* (b' *uve tilde* b'))).

Luego, utilizando (1) y algunos teoremas sintácticos,

⊢ Hip (de (1)) . a' = ($d \frown epinv \frown ((b'$ *uve* d) *punto* (b' *uve tilde* b'))) : ⊃ : a Sum b,c . a' CoExt a . ~a' = a.

A partir de esto obtenemos el teorema, empleando *TA1* y eliminando las hipótesis innecesarias.

De una manera semejante podemos demostrar las leyes correspondientes que se refieren a los productos y negaciones semánticos, y a las constantes predicado universales y nulas. Es obvio que estas leyes también pueden generalizarse para establecer la existencia de un número n, fijado de antemano, de sumas, productos, etc., semánticos.

E. Hipótesis específicas de la comprensión

Tomemos ahora para L el lenguaje S, igual que en el capítulo VI, y estudiemos algunas de sus propiedades semánticas específicas, es decir, las propiedades semánticas que dependen de los axiomas no lógicos de S. Aquí, el metalenguaje es MS^s_o.

La estructura semántica general de S viene dada por el contenido de los parágrafos precedentes. Especialmente importante entre los teoremas semánticos generales referentes a L (que ahora suponemos es S), es el teorema *TD10*, según el cual todos los teoremas de S que son también proposiciones son verdaderos. Un importante teorema semántico del presente apartado será el que diga que todos los teoremas de S, lógicos o *no*, que sean proposiciones serán también verdaderos en sentido apropiado. Para demostrar tal cosa en MS^s_o, habríamos de necesitar ciertos supuestos adicionales: en correspondencia con cada axioma no lógico de S, tendríamos menester aquí de una regla que estableciera que determinado abstracto de S tiene tal y cual propiedad semántica. Si el axioma de S fuese una proposición a, la correspondiente regla de MS^s_o establecería con tal fin que un abstracto ($b \frown epinv \frown a$), en donde b es una variable, es universal. Pueden parecer esenciales ciertas reglas

como ésta para permitirnos demostrar, en primer lugar, que todos los axiomas no lógicos de S (que sean proposiciones) y todas las clausuras de éstos son verdaderos, y después que absolutamente todos los teoremas que sean proposiciones son verdaderos. Ninguna de las Reglas generales de la comprensión depende de la estructura axiomática del lenguaje objeto (excepto de que este lenguaje contiene todos los teoremas de un cálculo lógico, simple, aplicado, de primer orden con inclusión de la identidad; pero la parte no lógica—por decirlo así—del lenguaje objeto, no está reflejada en modo alguno en dichas Reglas).

La finalidad de la semántica intraducente, tal como aquí se entiende, es simplemente la de proporcionar el marco general en que se encuadre una definición semántica de la verdad. Las reglas del metalenguaje intraducente no deben contener nada dudoso y han de ser completamente independientes de cualquiera de los supuestos específicos, no lógicos, de un lenguaje objeto particular. La teoría general de la comprensión está de acuerdo con esta concepción: proporciona la estructura general en que situar una definición semántica de la verdad, pero no nos permite determinar qué proposiciones del lenguaje objeto (que no sean las proposiciones que son teoremas lógicos) son verdaderas; además, las hipótesis *RGC1-RGC14* no contienen nada dudoso, en el sentido—aproximadamente—de que si la sintaxis elemental es coherente también lo será la teoría general de la comprensión, como veremos en el § G; y ninguno de los supuestos de MS_O^s depende en modo alguno de los axiomas no lógicos del lenguaje objeto.

Según esto, no querremos añadir ningún axioma más a MS_O^s, y no seremos capaces de demostrar en MS_O^s que todos los teoremas de S que son proposiciones son verdaderos. Pero podemos formular en MS_O^s proposiciones estableciendo que ciertas constantes predicativas de S son universales o nulas. Siempre que sea necesario pueden tomarse como hipótesis enunciados de esta clase; de tal forma podemos demostrar, fundándonos en ciertas hipótesis, todo lo que se podría demostrar de otro modo admitiendo reglas que estableciesen que aquellos axiomas de S que son proposiciones son verdaderos. (Este medio de utilizar las hipótesis donde se necesiten es esencialmente el empleado en *Principia Mathematica* con relación al Axioma de infinitud y al Axioma de multiplicación)[1].

Las hipótesis necesarias para S se llaman *Hipótesis específicas de la comprensión*, y corresponderán a las reglas no lógicas o de teoría de conjuntos de S: a cada una de estas reglas corresponderá una hipótesis específica, y todas estas hipótesis pueden establecerse como sigue:

Paralelamente a la regla *S1* de extensionalidad (VI, A y B), definimos aquí, en MS_O^s,

'*HEC1*' como '$(a)(b)$(AxExt a . Vbl b : $\supset$: Univ $(b \frown epinv \frown a)$)'.
'*HEC1*' es una abreviatura en MS_O^s del enunciado según el cual para toda expresión a que sea un Axioma de extensión y para toda variable

[1] Cf. *Principia Mathematica*, vol. I, pp. 536-42 y *passim*, y vol. II, pp. 200-25 y *passim*.

b, el abstracto vacío ($b \frown epinv \frown a$) es universal. Así, según esta hipótesis,

'$x \exists (x)(x')((x'')(x'' \in x \;.\equiv.\; x'' \in x') \;.\supset.\; x = x')$'

es universal.

Paralelamente a la regla *S2* de *S*, que nos confiere la existencia del conjunto nulo, establecemos que

'*HEC2*' abrevia '$(a)(b)$(AxCnjto Nulo a . Vbl b : $\supset$: Univ ($b \frown epinv \frown a$))'.

De acuerdo con esta hipótesis, por ejemplo,

'$x''' \exists (\mathrm{E}x)(x') \sim x' \in x$',

es universal.

De un modo semejante podemos definir las hipótesis específicas de la comprensión *HEC3-HEC7* correspondientes a las reglas *S3-S7* de *S*. Correspondiendo a *S8*, *S9* y *S10* definimos hipótesis específicas de la comprensión como sigue:

'*HEC8*' abrevia '$(a)(b)(c)$(AxFormSbcnjtos a . b Clau' a . Vbl c : $\supset$: Univ ($c \frown epinv \frown b$))'.

Y lo mismo para los restantes. Luego podemos dar la abreviación

'*HEC*' por '(*HEC1* . *HEC2* . .... . *HEC10*)'.

Los teoremas del parágrafo § F se demostrarán bajo la hipótesis de que '*HEC*' es cierta; pero, séalo o no, el objeto de la semántica intraducente no es el de averiguarlo.

Advirtamos que '*HEC*' puede definirse también en cualquiera de las diversas formulaciones de la semántica intraducente consideradas en (VIII, E), aunque ninguna de estas definiciones sería conveniente a menos que la '*HEC*' definida en un metalenguaje fuese equivalente a la '*HEC*' definida en cualquier otro. Pero tales definiciones equivalentes pueden darse fácilmente.

F. Teoremas de teoría de conjuntos y verdad

Podemos demostrar ahora algunas leyes en la hipótesis de que '*HEC*' se cumpla en MS^s_σ. En particular, podemos demostrar en MS^s_σ que, con esta hipótesis, todos los teoremas de *S* que son proposiciones son verdaderos.

Damos a continuación unos cuantos lemas que conducen a este teorema. El primer lema establece, en efecto, que, en la hipótesis '*HEC*', si a es un axioma de conjuntos de *S* o una clausura del mismo, es verdadero.

TF1a. $\vdash$ *HEC* . (AxExt a . v . AxCnjtoNulo a . v . AxPar a . v . AxSum a . v . AxPot a . v . AxEleccc a . v . AxInf a . v . (Eb)((AxForm Sbcnjtos b . v . AxSust b . v . AxFund b) . a Clau' b)) : $\supset$: Vrd a.

La demostración es inmediata. También

TF1b. $\vdash$ *HEC* . AxCnjtos a : $\supset$: (Eb)(b Clau' a . Vrd b).

Podemos demostrar ahora que todos los *teoremas* de *S* que son también proposiciones son verdaderos (en la hipótesis '*HEC*'). El método es parecido al utilizado para demostrar que todos los *teoremas lógicos* que son proposiciones son verdaderos, en el § D anterior.

TF2. ⊢ *HEC* . Prop *a* . Teor *a* : ⊃ : Vrd *a*.

Habiendo establecido ahora el teorema crucial *TF2* podemos demostrar la coherencia semántica de *S* en la hipótesis de que '*HEC*' es cierta. La demostración es semejante a la de (V, E).

TF3. ⊢ *HEC* . Prop *a* : ⊃ : ~(Teor *a* . Teor (*tilde a*)).

TF4. ⊢ *HEC* . Fmla *a* : ⊃ : ~(Teor *a* . Teor (*tilde a*)).

El teorema siguiente establece que, en la hipótesis '*HEC*', si *a* sea verdadera y (*a dscd b*) es un teorema de *S* donde *b* es una proposición, entonces *b* también es verdadera.

TF5. ⊢ *HEC* . Vrd *a* . Teor (*a dscd b*) . Prop *b* : ⊃ : Vrd *b*.

La demostración se apoya en *TF2* y *TD7*.

Los dos teoremas siguientes son consecuencias inmediatas de *TD19* y *TD20*, utilizando *TF2*.

TF6. ⊢ *HEC* . FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* . Teor (*c cu* (*a dscd b*)) : ⊃ : (*c*∩*epinv*∩*b*) Cmpr (*c*∩*epinv*∩*a*).

TF7. ⊢ *HEC* . FuncPropUna *a,c* . FuncPropUna *b,c* . Teor (*c cu* (*a triguión b*)) : ⊃ : (*c*∩*epinv*∩*a*) CoExt (*c*∩*epinv*∩*b*).

Estos teoremas son interesantes en cuanto que relacionan la comprensión y la coextensividad con los teoremas de *S* de tal y cual forma.

G. Coherencia relativa de la semántica intraducente

Vamos a abandonar la exposición de la semántica peculiar a *S* y a buscar una demostración de la coherencia relativa de MS^L_O, para cualquier *L* que incluya '='.

En (V, G) se demostró la coherencia del metalenguaje semántico MS^L_D con relación al lenguaje formado por *M* junto con la traducción de *L*. Ya establecimos que los axiomas análogos a los de MS^L_O son demostrables en MS^L_D, tomando 'Cmpr', 'Sum', etc., para definirlos en MS^L_D a partir de 'Den'; los axiomas lógicos y sintácticos de MS^L_D son precisamente los axiomas correspondientes de MS^L_O, y las Reglas de deducción de los dos metalenguajes semánticos son semejantes. De aquí se sigue, suponiendo que el lenguaje conjunto compuesto por *M* y la traducción de *S* sea coherente, que MS^L_O es igualmente coherente.

Pero podemos demostrar, además, que MS^L_O es coherente sólo con que *M* lo sea. Para ello buscamos una interpretación de 'Cmpr' en *M*, por ejemplo, una interpretación de *índole puramente sintáctica* tal que *RGC1-RGC14* se conviertan en teoremas de *M*.

Establecemos que

'Teor′ *a*' abrevia '(E*b*)(*a* IngEnm *b* . (*c*)(*c* IngEnm *b* : ⊃ : AxLog *c* . v . *c* = (*qis*∩*id*∩*qis*∩*ac*) . v . (E*d*)(E*e*)(*d* Ant$_b$ *c* . *e* Ant$_b$ *c* . *c* CI *d,e*)))'. Claramente se ve que el concepto de Teor′ es muy semejante al de Teor para L^* (V, F) (basta que 'P' de L^* sea '$x\varepsilon x = x$'); de aquí que la mayoría de los teoremas anteriores referentes a Teor, en particular los de (III, G), valgan también para Teor′; y nos referiremos ahora a estos teoremas al aludir a los teoremas correspondientes de (III, G).

Tomemos '*b* Cmpr *a*' para expresar que *b* y *a* son constantes predicativas y que, (i) cuando *b* es (*c*∩*epinv*∩*d*), siendo *d* una función propo-

sicional de la variable única y a es $(e \frown epinv \frown a')$, siendo a' una función proposicional de la variable e, la fórmula $(a'\ dscd\ d)$ es un Teor′ de L, o (ii) b y a son pe (y $(pe \frown qis\ dscd\ pe \frown qis)$ es un Teor′ de L), o (iii) b es pe y a es $(e \frown epinv \frown a')$, siendo a' una función proposicional de la variable única e, y $(a' \frown dscd\ pe \frown qis)$ es un Teor′ de L, o (iv) a es pe y b es $(c \frown epinv \frown d)$, siendo d una función proposicional de la variable única c, y $(pe \frown qis\ dscd\ d)$ es un Teor′ de L. Para este concepto puramente sintáctico usaremos 'Cmpr″' en lugar de 'Cmpr'. Establecemos que

'$(a\ abst\ b)$' abrevia '$(a \frown epinv \frown b)$'.

Luego 'Cmpr″' se puede definir en M como sigue:

'b Cmpr′ a' abrevia '((Ec)(Ed)(Ee)(Ea′)(b = (c *abst* d) . FuncPropUna d,c . a = (e *abst* a') . FuncPropUna a',e . Teor′ (a' *dscd* d)) . v . (a = pe . b = pe . Teor′ ($pe \frown qis$ *dscd* $pe \frown qis$)) . v . (Ee)(Ea′)(FuncPropUna a',e . a = (e *abst* a') . b = pe . Teor′ (a' *dscd* $pe \frown qis$)) . v . (Ec)(Ed)(FuncPropUna d,c . b = (c *abst* d) . a = pe . Teor′ ($pe \frown qis$ *dscd* d)))'.

(Adviértase que si L contuviese otras constantes predicado primitivas monádicas además de 'P', deberían añadirse aquí unas cláusulas al definiens para darles cabida; además, la cláusula 'Teor′ ($pe \frown qis$ *dscd* $pe \frown qis$)' puede abandonarse.)

Consideremos que *RGC1′* difiere de *RGC1* sólo en cuanto contiene 'Cmpr″' allí donde el desarrollo primitivo de *RGC1* contiene 'Cmpr'; de una manera semejante formamos *RGC2′*, *RGC3′*, ..., y *RGC14′*. Mostraremos ahora, de un modo algo esquemático, que *RGC1′*-*RGC14′* son demostrables en M. Algunas de estas demostraciones son largas, pero no especialmente difíciles.

RGC1′ establece que

$$\vdash (Eb)(a \text{ Cmpr′ } b \ .\ v\ .\ b \text{ Cmpr′ } a)\ .\ \equiv\ .\ \text{ConsPred } a.$$

Pero esto puede demostrarse inmediatamente si advertimos que

$$\vdash \text{FuncPropUna } d,c\ .\ a = (c\ abst\ d) : \supset : (Ea')(Eb')(\text{FuncPropUna } a',b'\ .\ \text{FuncPropUna } d,c : \text{Teor′ } (a'\ dscd\ d)\ .\ v\ .\ \text{Teor′ } (d\ dscd\ a'))\ .\ \equiv\ .\ \text{ConsPred } a,$$

y que

$$\vdash (Ea')(Eb')(\text{FuncPropUna } a',b' : \text{Teor′ } (a'\ dscd\ pe \frown qis)\ .\ v\ .\ \text{Teor′ } (pe \frown qis\ dscd\ a'))\ .\ \equiv\ .\ \text{ConsPred } pe.$$

Obtenemos *RGC1′* al combinar estas dos fórmulas.

RGC2′ se demuestra también si advertimos que

$$\vdash \text{FuncPropUna } a',d\ .\ a = (d\ abst\ a')\ .\ \text{FuncPropUna } b',e\ .\ b = (e\ abst\ b')\ .\ \text{Teor′ } (b'\ dscd\ a')\ .\ \text{FuncPropUna } c',d'\ .\ c = (d'\ abst\ c').\ \text{FuncPropUna } a'',e'\ .\ a = (e'\ abst\ a'')\ .\ \text{Teor′ } (a''\ dscd\ c') : \supset : a'' = a'.\ \text{FuncPropUna } c',d'\ .\ c = (d'\ abst\ c')\ .\ \text{FuncPropUna } b',e\ .\ b = (e\ abst\ b')\ .\ \text{Teor′ } (b'\ dscd\ c').$$

De un modo semejante

$$\vdash \text{FuncPropUna } a',d\ .\ a = (d\ abst\ a')\ .\ b = pe\ .\ \text{Teor′ } (pe \frown qis\ dscd\ a')\ .\ \text{FuncPropUna } c',d'\ .\ c = (d'\ abst\ c')\ .\ \text{FuncPropUna } a'',e'\ .\ a = (e'\ abst\ a'')\ .\ \text{Teor′ } (a''\ dscd\ c') : \supset : a'' = a'\ .\ \text{FuncPropUna } c',d'\ .\ c = (d'\ abst\ c')\ .\ b = pe\ .\ \text{Teor′ } (pe \frown qis \frown dscd \frown c'),$$

y así sucesivamente, colocando 'pe' de todas maneras posibles en lu-

gar de '*a*', '*b*' y '*c*' en *RGC2'*. Combinando las fórmulas resultantes obtenemos *RGC2'*.

Antes de considerar el axioma análogo a *RGC3*, la Regla de la suma, advirtamos que se puede definir ahora a partir de 'Cmpr'' un concepto de Sum como el definido en (VIII, B): llamamos a este concepto 'Sum''.

Veremos ahora cómo *RGC3'*, a la que podemos llamar *Regla de la suma'*, se verifica en *M*. Advirtamos primero que

(1) $\vdash$ FuncPropUna *b',d* . FuncPropUna *c',d* . *b* = (*d abst b'*) . *c* = (*d abst c'*) . *a* = (*d abst* (*b' uve c'*)) : $\supset$: Teor' (*b' dscd* (*b' uve c'*)) . Teor' (*c' dscd* (*b' uve c'*)).

También

$\vdash$ Hip (de (1)) . FuncPropUna *a'',d* . Teor' (*b' dscd a''*) . Teor' (*c' dscd a''*) : $\supset$: Teor' ((*b' uve c'*) *dscd a''*).

Partiendo de esto y de (1) tenemos que

(2) $\vdash$ Hip (de (1)) : $\supset$: (FuncPropUna *b',d* . FuncPropUna (*b' uve c'*),*d* . Teor' (*b' dscd* (*b' uve c'*))) . (FuncPropUna *c',d* . FuncPropUna (*b' uve c'*),*d* . Teor' (*c' dscd* (*b' uve c'*))) . ((FuncPropUna *b',d* . FuncPropUna *a'',d* . Teor' (*b' dscd a''*)) . (FuncPropUna *c',d* . FuncPropUna *a'',d* . Teor' (*c' dscd a''*)) : $\supset$: (FuncPropUna (*b' uve c'*),*d* . FuncPropUna *a'',d* . Teor' ((*b' uve c'*) *dscd a''*))),

para ello utilizamos el teorema sintáctico (cf. *TG9a* (III)) según el cual

$\vdash$ FuncPropUna *b',d* . FuncPropUna *c',d* : $\supset$: FuncPropUna (*b' uve c'*),*d*.

Pero a partir de (2) tenemos que

$\vdash$ Hip (de (1)) : $\supset$: *a* Cmpr' *b* . *a* Cmpr' *c* . (*a''*)(*d'*)(FuncPropUna *a'',d'* . (*d' abst a''*) Cmpr' *b* . (*d' abst a''*) Cmpr' *c* : $\supset$: (*d' abst a''*) Cmpr' *a'*),

y, por tanto, que

(3) $\vdash$ Hip (de (1)) : $\supset$: (*d abst* (*b' uve c'*)) Sum' (*d abst b'*), (*d abst c'*),

o que

$\vdash$ Hip (de (1)) : $\supset$: *a* Sum' *b,c*.

De aquí sacamos *RGC3'*. (Las cláusulas adicionales referentes a *pe* no valen en las hipótesis y por ello deben añadirse mediante disyunciones donde se necesiten.)

De una manera semejante se demuestra el axioma análogo a la Regla del producto, *RGC4'*.

Obsérvese que, a partir de 'Cmpr'', pueden definirse los conceptos análogos a los de semánticamente nulo o universal, empleando 'Cmpr'' en lugar de 'Cmpr' en las definiciones de 'Nula' y 'Univ'; de aquí también se saca un concepto de negación semántica. Estos conceptos se simbolizarán respectivamente por 'Nula'', 'Univ'' y 'Neg''.

Ahora podemos demostrar el axioma análogo a la Regla de negación, *RGC5'*, como sigue. Por *TG9d* (III) tenemos que

(4) $\vdash$ FuncPropUna *c,d* . *a* = (*d abst c*) . *b* = (*d abst tilde c*) . FuncPropUna *e,d'* :$\supset$: (FuncPropUna *c,d* . FuncPropUna *e,d'* . Teor'(*e dscd c*) . FuncPropUna (*tilde c*),*d* . FuncPropUna *e,d'* . Teor' (*e dscd tilde c*) :$\equiv$: Nula (*d' abst e*)),

y también, por *TG9e* (III), que

(5) ⊢ Hip (de (4)), :⊃: (FuncPropUna *e,d'* . FuncPropUna *c,d* . Teor' (*c dscd e*) . FuncPropUna *e,d'* . FuncPropUna (*tilde c*), *d* . Teor' (*tilde c dscd e*) :≡: Univ' (*d' abst e*)).
Análogamente,

⊢ Hip (de (*RGC5'*)); :⊃: (*b* Cmpr' *pe* . *a* Cmpr' *pe* :≡: Nula' *pe*) . (*pe* Cmpr' *b* . *pe* Cmpr' *a* :≡: Univ' *pe*).
Combinando este resultado con (4) y (5) obtenemos que

⊢ Hip (de *RGC5'*) :⊃: *a* Neg' *b*.
También se necesitan aquí cláusulas adicionales que contengan '*pe*'. Pero éstas no pueden estar en las hipótesis y por ello deben añadirse mediante miembros disyuntivos allí donde sean necesarias.

De forma en cierto modo parecida pueden demostrarse *RGC6'* y *RGC7'*. *RGC8'* es simplemente

⊢ (Ec) (*a* Clau' *c* . AxLog *c*) . Vbl *b* :⊃: Univ' (*b abst a*).
Pero esto es inmediato, utilizando la ley sintáctica que dice
⊢ (AxLog *a* .v. (E*d*) (*a* Clau *d* . AxLog *d*)) . Fmla *c* :⊃: Teor' (*c dscd a*).

Colocando 'Cmpr'' en vez de 'Cmpr' en el desarrollo primitivo de *RGC10*, obtenemos *RGC10'*.

RGC10' . ⊢ FuncPropUna *b,a* . Vbl *c* . Univ' (*a abst b*) :⊃: Univ' (*a abst c cu b*).
Que se demuestra como sigue. Advertimos, en primer lugar, que
(6) ⊢ Hip (de *RGC10'*) . FuncPropUna *e, e'* . *d* = (*e' abst e*) :⊃: Teor' (*e dscd b*).
De igual manera

⊢ Hip (de (6)) :⊃: Teor' (*tilde e dscd b*).
De aquí, aplicando *TG9e* (III) y *TG7a* (III),

⊢ Hip (de (6)) :⊃: Teor' (*c cu b*).
Luego
(7) ⊢ Hip (de (6)) :⊃: Teor' (*e dscd c cu b*),
y
(8) ⊢ Hip (de *RGC10'*) :⊃: Teor' (*pe∩qis dscd c cu b*)
Combinando ahora (7) y (8) y utilizando *TG8h* (III) tenemos que

⊢ Hip (de *RGC10'*) . (FuncPropUna *e,e'* . *d* = (*e' abst e*) :v: *d* = *pe*) :⊃: (FuncPropUna *e,e'* . *d* = (*e' abst e*) . FuncPropUna (*c cu b*), *a* . Teor' (*e dscd c cu b*)) .v. (*d* = *pe* . FuncPropUna (*c cu b*), *a* . Teor' (*pe∩qis dscd c cu b*))'.
De esta fórmula sacamos inmediatamente *RGC10'*.

Sabemos por lo dicho anteriormente en (III, H) y (V, F) que L^* es a la vez coherente y completo, en los sentidos definidos (cf. *TF13* (V)). Luego podemos demostrar en *M* que
(9) ⊢ ~(E*a*) (Fmla *a* . Teor' *a* . Teor' (*tilde a*))
y
(10) ⊢ (*a*) (Prop *a* :⊃: Teor' *a* .v. Teor' (*tilde a*)).
Fundándonos en (9) podemos demostrar *RGC9'*, y fundándonos en (10), *RGC12'*.

RGC9' consiste, en efecto, en que

⊢ Univ' *e* . Nula' *a'* . (FuncPropUna *b,a* . *e* = (*a abst b*) :v: *e* = *pe*) . (FuncPropUna *c,d* . *a'* = (*d abst c*) :v: *a'* = *pe*) :⊃: ~*e* Cmpr' *a'*.

Luego tenemos que demostrar cuatro casos. En primer lugar, consideremos la fórmula

(11) 'FuncPropUna *b*,*a* . FuncPropUna *c*,*d* . (*e*) (FuncPropUna *e* :⊃ . (*a abst b*) Cmpr′ *e*) . (*e*) (ConsPred *e* . ⊃ . *e* Cmpr′ (*d abst c*)) :⊃: ~(FuncPropUna *b*,*a* . FuncPropUna *c*,*d* . Teor′ (*b′ dscd c*))'.

Podemos demostrar que es válida en *M* en vista de (9). Adviértase que

(12) ⊢ FuncPropUna *b*,*a* . FuncPropUna *c*,*d* (*e*) (*e′*) (FuncPropUna *e*,*e′* :⊃: Teor′ (*e dscd b*) . Teor′ (*c dscd e*)) :⊃: Teor′ ((*b uve tilde b*) *dscd b*).

También

⊢ Hip (de (11)) :⊃: Hip (de (12)).

De aquí

⊢ Hip (de (11)) :⊃: Teor′ *b*,

y también

⊢ Hip (de (11)). Teor′ (*b dscd c*) :⊃: (*e*) (*e′*) (FuncPropUna *e*, *e′* .⊃ . Teor′ *e*).

Pero a partir de esto tenemos que

⊢ Hip (de (11)). Teor′ (*b dscd c*) :⊃: Fmla *b* . Teor′ *b* . Teor′ (*tilde b*).

De aquí

⊢ Hip (de (11)). Teor′ (*b dscd c*) :⊃: (E*a*) (Fmla *a* . Teor′ *a* . Teor′ *tilde a*)).

Por consiguiente, en vista de (9), (11) es un teorema. De un modo semejante demostramos que

⊢ Univ′ *pe* . Nula′ *a* :⊃: ~*pe* Cmpr′ *a′*,

⊢ Univ′ *e* . Nula′ *pe* :⊃: ~*e* Cmpr′ *pe*

y

⊢ Univ′ *pe* . Nula′ *pe* :⊃: ~*pe* Cmpr′ *pe*.

Combinando estas fórmulas de una manera apropiada obtenemos *RGC9′*

Análogamente podemos demostrar que se cumple *RGC12′*. *RGC12′* dice

⊢ Prop *a* . Vbl *c* :⊃: Univ′ (*c abst a*) .v. Nula′ (*c abst a*).

Pero por (10) tenemos que

⊢ Prop *a* . Vbl *c* :⊃: Teor′ *a* .v. Teor′ (*tilde a*).

Y por la sintaxis

⊢ Teor′ *a* .⊃ . (*b*) (ConsPred *b* :⊃: (E*c*) (E*d*) (FuncPropUna *c*,*d* . *b* = (*d abst c*) . Teor′ (*c dscd a*)) .v. (*b* = *pe* . Teor′ (*pe*∧*qis dscd a*)),

y

⊢ Teor′ (*tilde a*) .⊃ . (*b*) (ConsPred *b* :⊃: (E*c*) (E*d*) (FuncPropUna *c*,*d* . *b* = (*d abst c*) . Teor′ (*a dscd c*)) .v. (*b* = *pe* . Teor′ (*a dscd pe*∧*qis*)).

De aquí sacamos que

(13) ⊢ Prop *a* . Vbl *c* :⊃: (*b*) (ConsPred *b* .⊃ . (*c abst a*) Cmpr′ *b*) .v. (*b*) (ConsPred *b* .⊃ . *b* Cmpr′ (*c abst a*)).

Pero (13) no es otra que *RGC12′*.

RGC11′ es simplemente:

⊢ Prop *a* . Vbl *b* . Vbl *c* . ~*b* = *c* :⊃: (*b abst a*) Cmpr′ (*c abst a*).

Su demostración es inmediata.

RGC13′ establece que

⊢ FuncPropUna *a*,*b* . *b* SLb *a* . *d* VLb$^{c}_{i}$ *a* . ~*b* = *c* :⊃: (*b abst a*) Cmpr′ (*c abst d*).

Podemos demostrar esto en *M* si advertimos que

(14) $\vdash$ Vbl b . Vbl c . $\sim b = c$:$\supset$: Teor′ $(c \frown id \frown b)$.
Pero también
(15) $\vdash$ FuncPropUna a, b . b VLb a . d $SLb^{\circ}_{\circ}$ a . $\sim b = c$:$\supset$: Teor′ $(c \frown id \frown b\ dscd\ (d\ dscd\ a))$,
y de aquí, en vista de (14),
$\vdash$ Hip (de (15)) :$\supset$: FuncPropUna a, b . FuncPropUna d,c . Teor′ $(d\ dscd\ a)$.
Pero de este resultado sacamos fácilmente *RGC13′*.

La demostración de *RGC14′* es inmediata.

Obtenemos así una interpretación de 'Cmpr' dentro de *M* tal que permite demostrar *RGC1-RGC14*. Cualquier incoherencia que engendre el utilizar *RGC1-RGC14* junto con las reglas de lógica y de *M* puede transformarse en una incoherencia que aparezca si se toma *M* como lenguaje sintáctico para el tipo apropiado de *L*: así se establece la coherencia relativa de *RGC1-RGC14*.

Esta «demostración» de coherencia relativa, como la de (V, G), se presenta de un modo no formalizado, en un metalenguaje natural. Pero puede probablemente formalizarse sin ninguna dificultad, utilizando solamente unos conceptos lógicos y semánticos muy limitados.

CAPÍTULO X

Constantes individuales y funcionales

En el desarrollo de los diversos metalenguajes semánticos anteriores, hemos considerado únicamente lenguajes objeto que no contienen constantes individuales ni funcionales primitivas. Pero hemos visto que los lenguajes objeto que contienen unas u otras pueden transformarse fácilmente en lenguajes que no las contienen, y viceversa, gracias a la teoría de las descripciones de Russell (II, F). La exclusión de los lenguajes objeto que contienen semejantes constantes primitivas ha facilitado, en particular, el desarrollo de la semántica intraducente; no obstante, muchos lenguajes objeto importantes contienen de hecho una o varias constantes individuales o funcionales como elementos primitivos; hemos descrito estos lenguajes sin formalizarlos en el capítulo II y hemos hecho ver que eran especialmente importantes en investigaciones matemáticas y de filosofía de la ciencia. Además, todos los metalenguajes formulados anteriormente contienen constantes individuales primitivas (descriptivo-estructurales) y una constante funcional primitiva. Por lo tanto, será útil considerar en este capítulo los cambios que hacen falta para hacer aplicables las diversas teorías semánticas anteriores a lenguajes objeto o a metalenguajes (tomados como lenguajes objeto) que contengan una o varias constantes individuales o funcionales primitivas.

Hemos de considerar primero los *reajustes sintácticos* necesarios cuando se permite que el lenguaje objeto contenga constantes *individuales* primitivas; esto ocupará el § A, y en el § B perfilaremos *la nueva formulación de* MS_D^L. En el § C se definen algunas relaciones restringidas de denotación de *grado superior*. En el § D se esboza la *nueva formulación de la semántica intraducente* y en el § E se demuestran varios *teoremas* de la semántica intraducente de constantes individuales. En el § F se bosqueja la teoría sintáctica y semántica de las constantes *funcionales*. Finalmente, en el § G consideramos de nuevo la cuestión de la *autorreferencia*, en relación con la semántica intraducente; veremos que un metalenguaje semántico intraducente puede formularse de forma que contenga de un modo coherente su propio concepto de verdad (intraducente).

Si L contiene una o varias constantes individuales como elementos primitivos, el metalenguaje semántico basado en 'Den' para L se llamará $MS_D^{L\prime}$ y el metalenguaje intraducente para L se llamará $MS_O^{L\prime}$. Estos dos metalenguajes difieren sólo levemente de MS_D y MS_O^L, respectivamente.

A. Reajustes sintácticos

Cuando permitimos que el lenguaje objeto L contenga una o varias constantes individuales como elementos primitivos, hemos de hacer algunas ligeras modificaciones en la descripción sintáctica rigurosa de L (los cambios sintácticos que esbozaremos en esta sección serán comunes a $MS_D^{L\prime}$ y $MS_O^{L\prime}$).

Sea

'ā', 'ā'', 'ā''', . . . ,

la lista finita o infinita pero numerable de las constantes individuales primitivas de L, como en el capítulo II (debe considerarse que cada constante nombra un solo individuo y —si se quiere— que constantes distintas nombran individuos distintos). La formulación no formalizada de L es exactamente igual que en el capítulo II. En la sintaxis formal de L debe añadirse —para nombrar 'ā'— una constante descriptivo-estructural, '*ay*', distinta de *uve*, *tilde*, etc.: ha de lograrse tal cosa mediante la adición de cláusulas apropiadas a *RSin1* (III, B); también debe añadirse a *RSin2* una cláusula estipulando que *ay* no es ninguna cadena de expresiones; el sentido de *RSin3* debe ampliarse ligeramente, así como el de *RSin4*; llamemos ahora a estas reglas *RSin1'-RSin4'*. De un modo parecido deben ampliarse ligeramente *R1'-R8'*, *MP'*, *Gen'* y *Abst'*.

Puede considerarse que una expresión es una constante individual de L si y sólo si o bien es *ay* sola o bien se compone de *ay* seguida de uno o varios acentos.

'ConsIn *a*' abrevia '(*a* = *ay* .v. (E*b*) (E*c*) (SartaAc *b* . *a* = *ay*⌢*b*)))'. Esta definición sólo es necesaria cuando L contiene una cantidad numerable de constantes individuales primitivas; si L no contuviese más que un número finito de ellas, se podría definir 'ConsIn *a*' de un modo análogo a como fue definida 'ConsPredPrim *a*' en (III, D), por enumeración. Pero, independientemente de cómo definamos el concepto de constante individual, podemos llamar *término* a toda expresión *a* de L que sea una variable o una constante individual.

'Trm *a*' abrevia '(Vbl *a* .v.v ConsIn *a*)'.

El definiens de la definición de 'FmlaAt *a*' (III, D) sólo ha de alterarse un poco, sustituyendo simplemente la cláusula

'Vbl *b* . Vbl *c* . Vbl *d* . Vbl *e* . Vbl *a*''

por

'Trm *b* . Trm *c* . Trm *d* . Trm *e* . Trm *a*''.

Análogamente, en la definición dada en (III, D) de '*a* Abst *b*', 'Vbl *d*' debe sustituirse por 'Trm *d*'. Pero adviértase que no serán necesarios más cambios en la definición de 'Fmla *a*', una vez realizados estos cambios preliminares.

En (III, E) definimos '*a* SLbl_e^b *d*' para expresar que *a* sólo difiere de *d* en que contiene una aparición libre de *b* en lugar de una sola aparición libre de *c* en *d*. Debido ahora a la presencia de constantes individuales en L, queremos permitir que *b* pueda ser en esta definición una constante individual: definamos, por tanto, '*a* Sl_e^b *d*' igual que '*a* SLbl_e^b *d*' ha sido definido en (III, E), pero poniendo, en lugar de '*b*' AparLb_a *b*',

'(ConsIn b . b' Apar_a b :v: b' AparLb_a b)'; se define entonces 'a $S?^b_c$ d' de un modo semejante a como fue definido 'a $SLb?^b_c$ d' en (III, E): 'a $S?^b_c$ d' expresa que a sólo difiere de d en que contiene una constante individual b o apariciones libres de la variable b en 0 o más lugares en que haya apariciones libres de la variable c en d. Finalmente, se define que 'a S^b_c d' expresa que a sólo difiere de d en que contiene una constante individual b o apariciones libres de una variable *b en todos los lugares* en que haya apariciones libres de la variable c en d:

'a S^b_c d' abrevia '(a $S?^b_c$ d . (Vbl b . c VLb a :⊃: $b = c$) . (ConsIn b .⊃. ~c VLb a))'.

Definimos también 'a $S1'^b_c$ d' para expresar que a difiere sólo de d en que contiene una constante individual b o apariciones libres de la variable b en un sólo lugar en que haya una aparición libre de la variable c en d *o una aparición de la constante individual c* en d. Entonces pueden definirse fácilmente 'a $S?'^b_c$ d' y 'a S'^b_c d' para expresar los conceptos que la notación señala de un modo evidente.

En el definiens de la definición de 'AxCuant1 a' (en (III, E)) se sustituye ahora 'b SLb^c_a e' por 'b S^c_a e'. En el de la definición de' AxId1 a' se sustituye 'Vbl b' por 'Trm b'. En el de 'AxId2 a', 'Vbl b . Vbl c' debe sustituirse por 'Trm b. Trm c'. Finalmente, en el definiens de la definición de 'AxAbst a', sustitúyase 'd $SLb?^b_c$ e' por 'd $S?'^b_c$ e . Trm c . Vbl b'.

Todas las demás modificaciones que puedan hacer falta en las definiciones o teoremas sintácticos pueden hacerse fácilmente. Nos ocuparemos ahora de los cambios que se requieren en la parte *semántica* de MS^L_D'.

B. Constantes individuales y denotación múltiple

En MS^L_D' la denotación múltiple podría interpretarse de forma que a las constantes individuales se las permitiera denotar; pero esto llevaría a unas complicaciones que podemos evitar por otro procedimiento. No es necesario cambio alguno en el enunciado de las Reglas semánticas *RDen1* y *RDen2* (IV, D), aunque su sentido queda ligeramente alterado debido a la presencia en L de constantes individuales como elementos primitivos.

Podemos decir que una expresión a es un *nombre propio* de un objeto x si y sólo si a es una constante individual y el abstracto ($qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a$) denota x.

'a NbrPr x' abrevia '(ConsIn a . ($qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a$) Den x)'.

Indicamos a continuación tres teoremas con el fin de mostrar que esta definición de 'NbrPr' proporciona un concepto intuitivamente justificable de lo que es un nombre propio.

TB1. ⊢ a NbrPr x .⊃. ConsIn a.

La demostración es inmediata.

TB2. ⊢ a NbrPr y, si se toma como 'y' cualquier constante individual de la parte traducente de MS^L_D' y como 'a' la descripción estructural de esta constante. Usando *RDen1* y *R5'*, sabemos que

⊢ ($qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a$) Den y .≡. $y \equiv y$,

donde (etc., como en *TB2*). Pero por *R7'*, observando que

$$\vdash \text{ConsIn } a$$

por hipótesis, obtenemos *TB2*.

Finalmente, tenemos el Principio de unicidad, según el cual una expresión es el nombre propio de a lo sumo una entidad.

TB3. $\vdash a$ NbrPr x . a NbrPr $y :\supset: x = y$.

La demostración es la siguiente. Sabemos por sintaxis que

(1) $\vdash \sim$ConsIn a . $\neq$ *qis* $:\supset: \sim$ConsPred $(qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a)$.

Luego, si tomamos 'a' como descripción estructural de una expresión que no sea ni *qis* ni una constante individual, sabemos por (1) y *RDen2* que

$$\vdash \sim(qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a) \text{ Den } y,$$

y, por tanto, que

(2) $\vdash$ ConsIn a . $(qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a)$ Den y . $(qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a)$ Den $z :\supset: y = z$.

Asimismo, si tomamos 'a' como descripción estructural de una constante individual 'y', empleando *RDen1* tenemos que

$$\vdash (qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a) \text{ Den } x . \equiv . x = y.$$

Valiéndonos de *TE5* (II), una ley de identidad, y *TE2* (IV), tenemos entonces que

(3) $\vdash$ ConsIn a . $(qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a)$ Den x . $(qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a)$ Den $z :\supset: x = z$,

en donde 'a' se toma como descripción estructural de una constante individual. Combinando (2) y (3) y usando *RSin4'*, obtenemos el teorema.

Estas tres leyes deben ser válidas, evidentemente, para cualquier concepto de nombre propio en L que pueda proponerse intuitivamente; y de la definición dada parecen deducirse inmediatamente todas las demás propiedades deseables de los nombres propios en L. La teoría semántica de las constantes individuales no es, pues, sino la teoría de la denotación de expresiones para determinadas clases virtuales unitarias.

Queremos decir también que un nombre propio está *subsumido* en un abstracto. Para permitirlo, podemos definir

'a Sub^0 b' como '(x) (a NbrPr x . $\supset$. b Den x)'.

(Podría pensarse que la definición de 'Sub' en (IV, C) es utilizable aquí; pero si a es una constante individual, entonces según esta definición y debido a *RDen2*, a está subsumida en todo b: *RDen2* establece que

$$\vdash a \text{ Den } x . \supset . \text{ ConsPred } a,$$

pero

$$\vdash \text{ConsIn } a . \supset . \sim\text{ConsPred } a,$$

y, por lo tanto,

$$\vdash \text{ConsIn } a . \supset . \sim a \text{ Den } x,$$

luego

$$\vdash \text{ConsIn } a . \supset . (x)\ (a \text{ Den } x . \supset . b \text{ Den } x).$$

Cuando a es una constante individual debemos, por tanto, emplear la relación Sub^0 en lugar de Sub.)

Abordamos ahora el concepto de verdad. ¿En qué circunstancias una proposición que contenga una constante individual ha de consi-

derarse *verdadera*? Si se trata de una proposición universal atómica o de una proposición universal no atómica, la definición puede darse exactamente igual que antes (V, A) en (I) y (II).

Pero consideremos una proposición *a* de *L* que *no* sea una proposición universal; por ejemplo, 'Pā'. ¿En qué circunstancias podemos decir que es verdadera? Es verdadera si existen una expresión *b* que denote precisamente aquellos objetos que tienen P y una expresión *c* que sea un nombre propio de ā (estando *c* subsumido en *b* en el sentido que acabamos de definir). O bien, con más generalidad, supongamos que *a* es una proposición, pero no una proposición universal. (*L* contiene una proposición semejante, porque contiene una constante individual como elemento primitivo). Podemos decir entonces que *a* es verdadera siempre que *a* contenga una aparición de una constante individual *b*, que exista una variable *d* como variable libre de determinada *c*, de la cual *a* difiera sólo en contener *b* allí donde haya apariciones libres de *d* en *c* y que *b* sea soporte de la relación Sub^0 para el abstracto $(d \frown epinv \frown c)$.

'Vrd_3 *a*' abrevia '(Prop *a* . ~PropUniv *a* . (E*b*) (E*c*) (E*d*) (ConsIn *b* . *d* VLb *c* *a* S^b_d *c* . *b* Sub^0 $(d \frown epinv \frown c)$))'.

El concepto de 'Vrd_3' puede quizá aclararse mediante un ejemplo. Supongamos que *a* sea una proposición no universal de *L*, '---ā---', que contenga la constante individual 'ā'; escogemos entonces una variable, digamos '*x*', y formamos la función proposicional '---*x*---' tal que *a* difiera de ella sólo por contener 'ā' allí donde haya apariciones libres de '*x*' en '---*x*---'; formamos entonces el abstracto '*x*ɜ---*x*---'. Una proposición como 'Russell es mortal', por ejemplo, es verdadera en un sistema formal apropiado sólo cuando 'Russell' es soporte de la relación Sub^0 para '*x* ɜ *x* es mortal'.

La definición de 'Vrd_3 *a*' es el complemento de las definiciones de 'Vrd_1 *a*' y 'Vrd_2 *a*', de suerte que

'Vrd *a* abrevia '(Vrd_1 *a* .v. Vrd_2 *a* .v. Vrd_3 *a*)'.

Logramos, pues, en MS^L_D' un predicado completamente general para la verdad de las proposiciones de *L*.

La adecuación de 'Vrd' puede demostrarse fácilmente mediante la Segunda regla de adecuación de (V, C) y una Regla de adecuación apropiada para 'Vrd_3'.

Igual que en (V, B), pueden darse diversas definiciones de verdad, incluyendo una a partir de abstractos vacíos. Hemos venido utilizando la definición a base de abstractos vacíos en el desarrollo de la teoría de la verdad y seguiremos usándola en lo sucesivo; pero la definición de 'Vrd_3' que hemos dado aquí tiene el interés de hacer resaltar algunas de las propiedades semánticas de las constantes individuales. Es más, mediante las Reglas de adecuación, puede establecerse fácilmente la equivalencia del concepto contenido en 'Vrd_3' con el contenido en 'Vrd', en tanto que definida a partir de abstractos vacíos y aplicada exclusivamente a proposiciones no universales que contengan constantes individuales.

El desarrollo ulterior de $MS_D^{L\prime}$ es paralelo al de MS_D^L, y la demostración de la coherencia de $MS_D^{L\prime}$ con relación a la de L más los axiomas sintácticos es, en lo esencial, la dada en (V, G).

C. Abstracción de relaciones

Un rasgo interesante de todas las teorías semánticas basadas en la denotación múltiple anteriormente desarrolladas es el de que los únicos tipos de expresiones de L que se requieren como expresiones denotadoras son predicados *monádicos*. La denotación múltiple se toma como relación semántica *diádica* entre predicados monádicos de L y los objetos de L. Los símbolos de relación de L no se consideran denotadores, de forma que no es necesario introducir relaciones de denotación múltiple de grado superior. Podría parecer que estas relaciones serían esenciales para manejar las propiedades semánticas de las relaciones de L; por ejemplo, querríamos ser capaces de decir que 'P'' denota (en determinado sentido) los objetos x e y (tomados en este orden) siempre que P' xy; necesitaríamos entonces dentro del metalenguaje una relación de denotación *triádica*. Para manejar las relaciones triádicas de L, necesitaríamos dentro del metalenguaje una relación de denotación tetrádica, y así sucesivamente. Lo interesante es que no han sido necesarias estas relaciones de grado superior: hemos podido definir con toda generalidad el concepto semántico de verdad y varios otros conceptos semánticos dependientes de él, empleando sólo la sencilla relación de denotación diádica. Es claro que, para estos fines al menos, puede prescindirse por completo de relaciones de denotación de grado superior.

No obstante, estas relaciones de grado superior tienen cierto interés por sí mismas, y algunas relaciones restringidas de este tipo son definibles dentro de $MS_D^{L\prime}$. Es esencial para ello la presencia de constantes individuales en L y también en el metalenguaje, por lo cual estas relaciones no pueden introducirse en MS_D^L, sino sólo en $MS_D^{L\prime}$. Ante todo, hemos de presuponer el método de tratar la abstracción relacionante dentro de L aludida al final de (II, D): entonces es definible un tipo restringido de relación de denotación triádica, como veremos a continuación.

'*a* Den *z*, *w*' abrevia 'Vrd *d*', donde '*a*' se toma como descripción estructural de cierto abstracto diádico '$xx'\varepsilon$---x---x'---' que no contenga variables libres, '*z*' y '*w*' se toman como constantes individuales cualesquiera de las cuales '*b*' y '*c*' son, respectivamente, las descripciones estructurales, y '*d*' como descripción estructural de la proposición que resulta de '---x---x'---' sustituyendo toda aparición libre de las variables 'x' y 'x'' por las constantes *b* y *c*, respectivamente.

De un modo análogo puede definirse

'*a* Den *x*, *y*, *z*',

donde (etc., para '*a*', '*x*', '*y*' y '*z*'); y así sucesivamente. Obsérvese que no definimos

'*a* Den *x*, *y*' ni '*a* Den *x*, *y*, *z*'

para las *variables* 'a', 'x', 'y' y 'z', sino sólo cuando éstas son constantes de tipos apropiados.

La utilidad de estas definiciones es quizá algo limitada y, en realidad, no está claro si estos tipos de denotación más generales se necesitan en semántica; pero si así fuera, estas definiciones muestran que pueden conseguirse formas restringidas de esta denotación dentro de $MS_D^{L\prime}$.

D. Constantes individuales y comprensión

Consideremos ahora las modificaciones que requiere el metalenguaje MS_O^L cuando L contiene una o varias constantes individuales primitivas. Los cambios sintácticos necesarios ya han sido perfilados en el § A, pero hay que abandonar *RSin4'* y tomar en su lugar *TG4* y *TG13* del capítulo III, como en (VIII, D). 'Cmpr' es aquí el único elemento primitivo semántico, de forma que $MS_O^{L\prime}$ es intraducente.

Cabe dar igual que en (VIII, C) el concepto de verdad para proposiciones universales atómicas o no atómicas (de L) que no contengan constantes individuales; 'Vrd_1 a' y 'Vrd_2 a' pueden darse por definidos. También es posible introducir aquí una relación análoga a Sub^0, de forma que 'Vrd_3 a' pueda definirse en $MS_O^{L\prime}$ igual que antes, en el § B: 'Vrd_3' se aplica sólo a las proposiciones que no son universales y que, por tanto, contienen al menos una constante individual; entonces, como en el § B,

'Vrd a' puede abreviar '(Vrd_1 a .v. Vrd_2 a .v. Vrd_3 a)'.

También pueden darse aquí diversas definiciones de 'Vrd', incluyendo una a base de abstractos vacíos.

Cuando se tiene el propósito de desarrollar la teoría semántica de las constantes individuales en $MS_O^{L\prime}$ la siguiente relación es más útil que Sub^0:

'a Sub^{00} b' abrevia '(ConsPred a . ConsPrep b . a Sub b :v: ConsPred a . ConsIn b . a Sub ($qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown b$) :v: ConsIn a . ConsPred b . ($qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a$) Sub b :v: ConsIn a . ConsIn b . ($qis \frown epinv \frown qis \frown id \frown a$) Sub ($qis \frown epinv \frown qis \frown b$))'.

Asimismo, establezcamos que

'a Cmpr^{00} b' abrevia 'b Sub^{00} a'.

A partir de 'Sub^{00}' o 'Cmpr^{00}', podemos definir algunos conceptos ulteriores afines a 'CoExt', 'ED', 'Unit', 'Com', 'Sum', etc., poniendo 'Cmpr^{00}' en lugar de 'Cmpr' en todos los definientia; estos conceptos pueden simbolizarse respectivamente por 'CoExt^{00}', 'ED^{00}', 'Unit^{00}', etcétera, y algunos de ellos serán útiles para enunciar los teoremas del siguiente parágrafo.

Las reglas semánticas de $MS_O^{L\prime}$ son las de MS_O^L, aunque su sentido quede ahora ligeramente alterado; por tanto, la coherencia relativa de estas reglas puede demostrarse, en lo esencial, igual que en (IX, G).

La teoría de las constantes individuales (formulada sobre la base de cualquiera de los otros elementos primitivos intraducentes, como 'Vrd', 'Univ', 'Nula', 'O' o '$\lrcorner$') es, por supuesto, análoga.

E. Algunos teoremas semánticos

Ocupémonos ahora de unos cuantos teoremas diversos de la semántica intraducente de constantes individuales.

Damos primero (sin demostraciones) una breve lista de teoremas sintácticos referentes a las constantes individuales.

TE1a. $\vdash$ ConsIn a . $c\ S^a_a\ a'$. Prop $a' :\supset:$ Prop c.

TE1b. $\vdash$ ConsIn a . $c\ S'^a_b\ d$. Prop d . $\sim$PropUniv $d :\supset:$ Prop c . $\sim$PropUniv c.

TE1c. $\vdash c\ S^a_b\ d\ .\supset.\ c\ S?^a_b\ d$.

TE1d. $\vdash c\ S'^a_b\ d\ .\supset.\ c\ S?'^a_b\ d$.

TE2a. $\vdash c\ SL^a_b\ d :\supset: c\ S^a_b\ d\ .\ c\ S'^a_b\ d$.

TE2b. $\vdash$ ConsInd a . $c\ S^a_{a'}\ a'$. ConsIn b . $d\ S^b_{a'}\ a'$. d' VLb a' . FuncPropUna a',d' . $\sim$ PropUniv $d :\supset:$ $\sim$PropUniv c.

Como siempre, la definición de verdad que presuponemos es la enunciada a base de abstractos vacíos: los diversos teoremas del capítulo IX, en especial los del § D, se vuelven así automáticamente teoremas de $MS^{L'}_0$.

Muchos de los teoremas semánticos subsiguientes pueden demostrarse fácilmente dentro de un metalenguaje, traducente, empleando la Regla de adecuación apropiada. Las demostraciones son aquí, en un metalenguaje intraducente, algo más difíciles: dado que carecemos de cualquier forma de Regla de adecuación, hemos de buscar demostraciones totalmente nuevas.

Tenemos primero unos cuantos teoremas referentes a CoExt^{00}.

TE3a. $\vdash$ ConsIn a . ConsIn $b :\supset:$ $a\ \text{CoExt}^{00}\ b\ .\equiv.$ Vrd $(a\frown id\frown b)$.

Por la definición de 'CoExt^{00}',

$\vdash$ ConsIn a . ConsIn $b :\supset:$ $a\ \text{CoExt}^{00}\ b\ .\equiv.$ $(qis\frown epinv\frown qis\frown id\frown a)$ CoExt $(qis\frown epinv\frown qis\frown id\frown b)$,

y, por tanto, por *TD22* (IX),

$\vdash$ ConsIn a . ConsInd $b :\supset:$ $a\ \text{CoExt}^{00}\ b\ .\equiv.$ Vrd $(qis\ cu\ (qis\frown id\frown a\ triguión\ qis\frown id\frown b))$.

Pero por *TD10* (IX) y *TD15* (IX),

$\vdash$ ConsIn a . ConsIn $b :\supset:$ Vrd $(qis\ cu\ (qis\frown id\frown a\ triguión\ qis\frown id\frown b))$ $.\equiv.$ Vrd $(a\frown id\frown b)$.

De ahí *TE3a.*

TE3b. $\vdash$ ConsIn a . ConsIn b . $a\ \text{CoExt}^{00}\ b$. $d\ S?'^a_b\ c$. Prop $c :\supset:$ $(c\ dscd\ d)$.

Teniendo presentes los cambios sintácticos del § A, tenemos, por TD*10* (IX), que

$\vdash$ ConsIn a . ConsIn b . $d\ S?'^a_b\ c$. Prop $c :\supset:$ Vrd $(a\frown id\frown b\ dscd\ (c\ dscd\ d))$,

luego, por *TD7* (IX), que

$\vdash$ ConsIn a . ConsIn b . $d\ S?'^a_b\ c$. Prop c . Vrd $(a\frown id\frown b) :\supset:$ $(c\ dscd\ d)$.

Obtenemos entonces el teorema por *TE3a.*

Indicamos ahora, sin demostrarlos, unos cuantos lemas referentes a las constantes individuales y a las constantes predicado unitarias.

TE4a. $\vdash$ ConsIn $a\ .\supset.\ \sim$Nula $(qis\frown epinv\frown qis\frown id\frown a)$.

TE4b. $\vdash$ Unit a . b Sub a . $\sim$Nula $b :\supset:$ Unit b.

TE4c. $\vdash$ Unit a . c Neg $b :\supset:$ a Sub b $.\equiv.$ $\sim a$ Sub c.

TE4d. $\vdash$ ConsIn a . $\supset$. Unit ($qis_{\frown}epinv_{\frown}qis_{\frown}id_{\frown}a$).
TE4e. $\vdash$ $ED^{00}\ a :\equiv :$ ConsPred a .v. ConsIn a.
TE4f. $\vdash$ ConsIn a . $\supset$. a $CoExt^{00}$ ($qis_{\frown}epinv_{\frown}qis_{\frown}id_{\frown}a$).

Un teorema fundamental referente a las constantes individuales es el siguiente:

TE5. $\vdash$ ConsIn a . $\supset$. $Unit^{00}\ a$.

No es difícil demostrarlo aplicando algunos de los lemas anteriores.

Otro teorema fundamental relaciona Sub^{00} con la verdad. Supongamos que cierta constante individual, a, soporta la relación Sub^{00} para un abstracto no vacío 'x3---x---': entonces, la proposición que resulta de sustituir en '---x---' las apariciones libres de 'x' por a, es verdadera, y viceversa.

TE6a. $\vdash$ ConsIn a . b VLb d . c S^a_b d . FuncPropUna $d,b :\supset :$ a Sub^{00} ($b_{\frown}epinv_{\frown}d$) . $\equiv$. Vrd c.

La demostración se basa en *TD21* (IX) y el principio según el cual los teoremas de L referentes a la identidad, si son proposiciones, son verdaderos. Por TD*21* (IX),

$\vdash$ Hip (de *TE6a*) $:\supset :$ ($b_{\frown}epinv_{\frown}b_{\frown}id_{\frown}a$) Sub ($b_{\frown}epinv_{\frown}d$) . $\equiv$. Vrd (b *cu*($b_{\frown}id_{\frown}a$ *dscd* d)).

Pero

$$\vdash \text{Hip} :\supset : \text{Vrd } (b\ cu(b_{\frown}id_{\frown}a\ dscd\ d)) \ .\equiv .\ \text{Vrd } c,$$

por *TD10* (IX) y *TD15* (IX): de ahí el teorema. Un corolario de *TE6a* es el siguiente:

TE6b. $\vdash$ ConsIn $a :\supset :$ a Sub^{00} pe . $\equiv$. Vrd ($pe_{\frown}a$).

lo cual es claro recordando *TD23* (IX).

Algunos de los teoremas anteriores han dado condiciones *necesarias* para que pueda decirse que dos constantes individuales son $CoExt^{00}$; el siguiente enuncia una condición *suficiente* para ello.

TE7. $\vdash$ ConsIn a . ConsIn b . $\sim a = b$. e VLb a' . FuncPropUna a' , e . c S^a_e a' . d $S^{a'}_e$ a' . a'' $SLb^{a'}_e$ a' . $\sim e'$ VLb a' . Vrd c . Vrd d . Vrd (e *cu* e' *cu* ((a' *punto* a'') *dscd* $e_{\frown}id_{\frown}e'$)) $:\supset :$ a $CoExt^{00}$ b.

F. Constantes funcionales

Bosquejamos ahora muy sumariamente los reajustes necesarios cuando el lenguaje objeto L contiene una o varias constantes *funcionales* (funtores) primitivas.

Sea

$$\text{'}\overline{\text{f}}\text{'}, \text{'}\overline{\text{f}}'\text{'}, \text{'}\overline{\text{f}}'''\text{'}, \ldots, \text{'}\overline{\text{f}}'''\ldots\text{'}$$

la lista finita de funtores primitivos de L, cada uno del grado correspondiente, como en el capítulo II. Añadimos entonces '*efe*' como nueva constante (descriptivo-estructural), en el lenguaje sintáctico M de L, para nombrar '$\overline{\text{f}}$'. '$\overline{\text{f}}'$' tendrá entonces como descripción estructural '(*efe*$_{\frown}$*ac*)', y así sucesivamente. Las reglas sintácticas han de alterarse ligeramente para poder acoplar dentro del sistema esta nueva constante; si L contiene también constantes individuales primitivas, hay que alterar *RSin1'-RSin4'*; en caso contrario, *RSin1-RSin4* del capítulo III.

Evidentemente podemos definir

'ConsFun *a*'

mediante enumeración finita, como sea necesario. Supongamos que *L* contiene sólo dos constantes funcionales primitivas, '**f**' de grado uno y '**f**'' de grado dos, así como varias constantes individuales primitivas; entonces

'Trm *a*' puede definirse como '(Vbl *a* .v. ConsIn *a* .v. (Eb) (E*c*) ((Vbl *b* .v. ConsIn *b*) . (Vbl *c* .v. ConsIn *c*) . (*a* = (*efe*⌢*b*) .v. *a* = (*efe*⌢*ac*⌢*b*⌢*c*))))'.

Los otros cambios necesarios en la sintaxis de *L* pueden darse fácilmente.

Las constantes funcionales no denotan en el sentido de la denotación múltiple; pero los términos que no contienen variables libres han de considerarse nombres propios de los objetos correspondientes; por ejemplo, '**f**ā' será el nombre propio del objeto **f**ā. El concepto de 'NbrPr' del § B puede, por tanto, extenderse, a base de 'Den', del modo siguiente:

'*a* NbrPr *x*' abrevia '(Trm *a* . ~(Eb) *b* VLb *a* . (*qis*⌢*epinv*⌢*qis*⌢ *id*⌢*a*) Den *c*)'.

Las constantes funcionales se tratan dentro de la semántica intraducente de un modo semejante, *mutatis mutandis*, a como hemos tratado ante las constantes individuales en el § D.

G. Autorreferencia y comprensión

Hemos observado en (IX, G) que el metalenguaje semántico intraducente MS_O^L proporciona una base coherente para la semántica de cualquier lenguaje de primer orden *L*, en el supuesto de que la sintaxis subyacente sea coherente; lo mismo ocurre en $MS_O^{L'}$, si *L* contiene constantes individuales primitivas. Gracias a su generalidad, el método según el cual se construyen MS_O^L o $MS_O^{L'}$ puede incluso proporcionar, *en cierto sentido*, una semántica coherente de sí mismo. Hemos indicado antes, en (V, H), que los metalenguajes traducentes basados en la denotación múltiple (y, en realidad, también los basados en los otros elementos primitivos) pueden contener de un modo coherente su propia semántica; si estos metalenguajes son coherentes no pueden contener su propio concepto semántico de verdad; pero un metalenguaje semántico intraducente no es sólo coherente con relación a la sintaxis elemental, como hemos visto: puede también formularse de forma que contenga su propio concepto semántico de verdad.

A fin de ver esto construimos un sistema formal semántico como indicamos a continuación. La sintaxis que hemos de emplear es una variante de la de (V, H-I); los símbolos primitivos, excluyendo por ahora las constantes descriptivo-estructurales, son '(', '(', '~', 'v', '=', 'ɜ', '⌢', 'Cmpr', y las variables '*a*', '*b*', etc.; para simplificar la sintaxis supongamos ahora que todas las variables se escriben '*a*', '*a*'', '*a*'', etcétera: los símbolos primitivos, con exclusión de las constantes descriptivo-estructurales, son entonces precisamente diez, a saber,

(1) '(', ')', '~', 'v', '=', 'ɜ', '⌢'. 'Cmpr', '*a*', y ' '.

Como constantes descriptivo-estructurales de este sistema formal tomamos ahora nombres de cada uno de estos símbolos primitivos. Sean
(2) '*pi*' el nombre de '(', '*pd*' el de ')', '*tilde*' el de '~', '*uve*' el de 'v' '*epinv*' el de 'ɜ', '*id*' el de '=', '*cdn*' el de '$\frown$', '*cmp*' el de 'Cmpr', '*ay*' el de '*a*' y '*ac*' el de ' '.
(Adviértase que '*ay*' se emplea aquí como descripción estructural de la *variable* '*a*', no de la constante 'ā' como en los apartados anteriores de este capítulo.)

Cada una de estas diez constantes descriptivo-estructurales es una constante individual primitiva y cada una necesita, a su vez, una descripción estructural. Podríamos, pues, establecer:
(3) '*PI*' como nombre de '*pi*', '*PD*' como nombre de '*pd*', '*TILDE*' como nombre de '*tilde*', etc.
Pero aun con la adición de esta lista no llegamos a completar el vocabulario sintáctico, porque cada una de las constantes descriptivo-estructurales 'PI', 'PD', etc., debe tener a su vez un nombre descriptivo-estructural; éstos habrán de tener a su vez nombres descriptivo-estructurales, y así sucesivamente. El vocabulario completo necesario comprende, por tanto, una infinidad de constantes descriptivo-estructurales.

Para proveer de una notación a esta infinidad de constantes, podemos emplear acentos para formar nuevas constantes igual que formamos nuevas variables: podemos pensar que '*pi*'', por ejemplo, es el nombre de '*pi*', '*pi*''' el de '*pi*'', y así sucesivamente. El vocabulario primitivo total del metalenguaje semántico se compone entonces únicamente de los símbolos de (1) y de las constantes descriptivo-estructurales de la lista (2), y las variables '*a*', '*a*'', '*a*''', etc., abarcan las expresiones del propio metalenguaje del cual son variables [1].

Nos referimos a este sistema formal como MSS_σ, el metalenguaje semántico (intraducente) para sí mismo, basado en la comprensión.

Las reglas de MSS_σ son, en lo esencial, iguales que las dadas en (VIII, D); las reglas semánticas comprenden adaptaciones de *RGC1*-*RGC13*; no hace falta una adaptación de *RGC14* porque MSS_σ no contiene constantes predicativas primitivas *monádicas*.

Pueden definirse dentro de MSS_σ varios conceptos booleanos, como en (VIII, B).

Por cada regla no lógica (es decir, sintáctica o semántica) de MSS_σ, podemos definir dentro de MSS_σ una Hipótesis específica de la comprensión. Por ejemplo, correspondiendo a *RSin1*, según la cual:

$$\vdash \sim pi = pd \;.\; \sim pi = tilde \;.\; \ldots \;.\; \sim ay = cmp,$$

podemos definir

'*HEC1*' como '(*a*) (*b*) (Vbl *b* . *a* = (*tilde PI*$\frown$*id*$\frown$*PD punto tilde PI*$\frown$*id*$\frown$*TILDE punto ... punto tilde AY*$\frown$*id*$\frown$*CMP*) :$\supset$: Univ (*b*$\frown$ *epinv*$\frown$*a*))'.

---

[1] En lugar de '=' y de '$\frown$', aquí o en el capítulo III, podríamos si quisiéramos tomar una relación análoga a la relación M de QUINE como elemento primitivo: véase *Mathematical Logic*, pp. 287-90; pero tendríamos todavía que resolver el problema de la caracterización axiomática de M.

Y también, correspondiendo a *RGC2*, por ejemplo, o más bien a una clausura de la fórmula estipulada por *RGC2*,

'$(a)(a')(a'')(a$ Cmpr $a' \,.\, a''$ Cmpr $a :\supset: a''$ Cmpr $a')$',

definimos

'*HEC7*' como '$(a)(b)$(Vbl $b \,.\, a = ((ay$ *cu* $ay \wedge ac$ *cu* $ay \wedge ac \wedge ac \wedge$ *cu* $((ay \wedge$ *cmp* $\wedge ay \wedge ac$ *punto* $ay \wedge ac \wedge ac \wedge$ *cmp* $\wedge ay)$ *dscd* $ay \wedge ac \wedge ac \wedge$ *cmp* $\wedge ay \wedge ac)) :\supset:$ Univ $(b \wedge$ *epinv* $\wedge a))$'.

Dentro de MSS_σ son definibles varios conceptos semánticos exactamente igual que en (VIII, B-C), incluyendo un concepto semántico de verdad. Las definiciones de '*HEC1*' y '*HEC7*' que acabamos de dar a modo de ejemplos, presuponen que el concepto semántico de verdad esté definido a partir de abstractos vacíos.

La demostración de la coherencia relativa de MSS_σ, en el supuesto de que las reglas de la sintaxis subyacente sean coherentes, puede darse igual que en (IX, G).

A través de esta sección no hemos hablado de otra semántica intraducente que de la formulada sobre la base de una relación de comprensión; pero es obvio que podría haberse utilizado del mismo modo cualquier otra formulación equivalente.

El que el concepto de verdad para MSS_σ sea definible dentro de este mismo lenguaje puede parecer en contradicción con el resultado de Tarski antes mencionado, según el cual, en términos generales, el concepto semántico de verdad de un lenguaje no es definible dentro de dicho lenguaje, si éste es coherente. Pero tal resultado se refiere únicamente a sistemas de semántica traducente, para los cuales el concepto de verdad ha de ser adecuado en el sentido aproximado de (V, C): el razonamiento de Tarski requiere que el concepto de verdad de que se trate sea adecuado, como hemos visto en (V, C). Dentro de la semántica intraducente se abandona en cierto modo la condición de adecuación, de forma que, para este tipo de sistemas, no puede darse un paso que es esencial en el razonamiento de Tarski: no existe, por tanto, un auténtico conflicto entre el resultado a que aquí llegamos y el de este autor.

Puesto que el concepto semántico de verdad de MSS_σ es definible dentro de su coherencia (bajo hipótesis adecuadas) puede demostrarse dentro de MSS_σ siguiendo un método análogo al de (IX, F); para esta demostración se hace uso de las Hipótesis específicas de la comprensión para MSS_σ, dos de las cuales hemos definido anteriormente. Esto no contradice en modo alguno el teorema de Gödel, mencionado en (V, I), según el cual (aproximadamente) si un sistema lingüístico L dado es coherente, el enunciado que dice que L es coherente no es demostrable dentro de L: semejante enunciado es, a lo más, demostrable sólo dentro de un lenguaje que contenga supuestos adicionales. En el caso de la demostración de coherencia para MSS_σ se utilizan fundamentalmente las hipótesis específicas de la comprensión; y los instrumentos deductivos utilizados en esta demostración son, en realidad, considerablemente más poderosos que los que tendría MSS_σ sin tales hipótesis específicas.

Vemos que MSS_σ puede, en cierto modo, referirse a sí mismo sin peligro, en el sentido de que contiene bajo hipótesis adecuadas su propia sintaxis y su propia semántica [1]. La semántica intraducente es, pues, completamente general, en el sentido de que puede formularse apropiadamente de un modo más o menos uniforme, de suerte que proporcione la sintaxis y la semántica de cualquier L, incluso de ella misma. Dentro de la semántica intraducente logramos un metalenguaje semántico de primer orden, numerable y sumamente estricto, para todo lenguaje objeto de primer orden, cualquiera que sea su complejidad: conseguimos así, en parte, el objetivo propuesto en (I, H). En los dos capítulos siguientes daremos una ulterior simplificación de la semántica intraducente, en la dirección del finitismo.

[1] Para otros tipos de sistemas que contengan sus propios conceptos semánticos de verdad, véase F. B. FITCH, «A Basic Logic», *The Journal of Symbolic Logic* 7 (1942) pp. 105-14; «Representations of Calculi», *ibid.*, 9 (1944), pp. 57-62; «A Minimum Calculus for Logic», *ibid.*, 9 (1944), pp. 89-94; «An Extension of Basic Logic», *ibid.*, 13 (1948), pp. 95-106; «The Heine-Borel Theorem in Extended Basic Logic», *ibid.*, 14 (1949), pp. 9-15; « A Further Consistent Extension of Basic Logic», *ibid.*, 15 (1950), pp. 209-17; «A Demonstrably Consistent Mathematics-Parts I and II», *ibid.*, 15 (1950), pp. 17-24, y 16 (1951), pp. 121-4. Ver también su *Symbolic Logic An Introduction.* El método de Fitch impone una restricción a la negación clásica, mientras que aquí no hace falta restricción alguna. Ver también J. R. MYHILL, «A System Which Can Define Its Own Truth», *Fundamenta Mathematicae*, 37 (1950), pp. 190-2.

CAPÍTULO XI

Inscripciones y denotación múltiple

Todos los metalenguajes semánticos considerados en los capítulos anteriores son de carácter clásico, en el sentido de que las expresiones del lenguaje objeto se consideran como signos-figuras o formas *(shapes)*. Desde hace algunos años existe cierto interés por la posibilidad de una sintaxis y una semántica *inscriptivas*, en las cuales las expresiones del lenguaje objeto fuesen consideradas exclusivamente como signos-sucesos o inscripciones. Este interés parece haber comenzado entre los lógicos polacos, pero sólo últimamente se han hecho contribuciones técnicas a la construcción de una teoría inscriptiva sistemática[1].

Este capítulo y el siguiente se consagrarán a formular dos metalenguajes semánticos de tipo inscriptivo. Las inscripciones o signos sucesos se tomarán como únicos valores para las variables representativas de expresiones. El primer metalenguaje semántico tendrá como único elemento primitivo semántico una relación de denotación múltiple; este metalenguaje será parecido a MS_D^L. El segundo metalenguaje inscriptivo que hemos de formular será más bien semejante a MS_G^L y en él una relación de comprensión funcionará como único elemento primitivo semántico. Los lenguajes objeto L seguirán siendo del tipo anteriormente estudiado; pero, para simplificar, supongamos primero que no contienen constantes primitivas individuales ni funcionales, que pueden añadirse después, si se quiere, mediante unos ligeros cambios en el contenido sintáctico y semántico.

En MS_D^L y MS_G^L se admite una infinidad numerable de expresiones como valores para variables. Se admite que cada término primitivo descriptivo-estructural '*pe*', '*pi*', etc., representa un símbolo primitivo del lenguaje objeto L y que, dados dos términos descriptivo-estructurales cualesquiera, su cadena representa una expresión de L. Esta admisión declarada de una infinidad de expresiones de L está de acuerdo con el punto de vista clásico: puesto que las formas, como los números o los puntos espacio-temporales, constituyen un tipo abstracto de objetos que nunca se halla en la experiencia concreta, la admisión de una infinidad de ellos parece legítima.

[1] Véanse N. GOODMAN y W. V. QUINE, «Steps toward a Constructive Nominalism», *The Journal of Symbolic Logic*, 12 (1947), pp. 105-22; y R. M. MARTIN y J. H. WOODGER, «Toward an Inscriptional Semantics», *ibid.*, 16 (1951), pp. 191-203. Véase también, a este respecto, TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 290-1 y nota 23.

Cuando consideramos los signos sucesos o inscripciones nos encontramos con una situación completamente diferente. En este caso los valores para las variables representativas de expresiones pueden considerarse apariciones efectivas, físicas o fenoménicas, de determinado tipo, como trazos de tinta o sonidos que pueden descubrirse dentro del mundo espacio-temporal. Admitir explícitamente una infinidad numerable de inscripciones de *L* parece menos natural aquí; de hecho es posible que la disposición espacio-temporal del universo sea finita, de tal forma que pueda existir a lo sumo un número finito, aunque grande, de inscripciones de *L;* si es éste el caso, el supuesto de que exista una infinidad de ellas es falso. La verdadera situación es que no sabemos si el número de inscripciones reales es finito o infinito: querremos, por ello, componer una sintaxis y una semántica inscriptivas para *L* de un modo que no suponga ni lo uno ni lo otro (el negarse a admitir una infinidad de expresiones exige un cambio considerable en la sintaxis y la semántica expuestas anteriormente).

Entendamos por inscripción de *L* (en términos generales) todo carácter tipográfico o marca de tinta de *L* tomada por sí misma o toda serie de caracteres tipográficos de *L* dispuestos en un orden determinado. Para explicitar este orden podemos pensar que los caracteres que constituyen una expresión están dispuestos consecutivamente como en una línea impresa. Una línea puede ser de cualquier longitud finita, con la única condición de que no sea demasiado larga para situarse dentro del mundo espacio-temporal, y dadas dos líneas cualesquiera el resultado de poner una de ellas siguiendo inmediatamente a la otra es también una línea, siempre que no sea demasiado larga. Se busca que todos los caracteres admitidos pertenecientes a un lenguaje objeto dado *L* sean del mismo cuerpo tipográfico, de forma que no haya que contar con diferencias importantes de tamaño. (Estas condiciones no son estrictamente esenciales, pero ayudan a la composición de lugar intuitiva.)

Las inscripciones de *L* han de considerarse en principio discernibles, en tanto que perceptibles de un modo u otro, aunque no necesariamente por cualquier persona. No se requiere que sean percibidas claramente, sin embargo: algunas de ellas podrían ser excesivamente largas. Se considera que las inscripciones de *L* son un tipo de entidades físicas o fenoménicas, algunas de las cuales son los trazos de tinta corrientes que nos muestra la experiencia, mientras que las otras son semejantes a estos trazos de tinta, aunque posiblemente no aparezcan en la experiencia.

En el § A se presentan los *preliminares sintácticos* de una teoría sistemática de las inscripciones relativa a *L*. En el § B se demuestran algunos *teoremas elementales;* en el § C se da la *definición de* '*Fmla*' y en el § D *la de* '*Teor*'. En el § E se demuestran algunos *teoremas sintácticos ulteriores*. En el § F se dan los fundamentos de una *semántica inscriptiva* de *L* basada en la denotación múltiple, incluyendo una definición de verdad. El § G se consagra a la demostración de la *adecuación* de esta definición de verdad. Se da en el § H otra definición posible de la verdad a partir de abstractos vacíos. Parte del contenido de este

capítulo y del siguiente puede parecer una repetición de lo dicho anteriormente; existen, no obstante, importantes diferencias de detalle, por lo cual resultan imprescindibles algunas repeticiones manifiestas.

En el capítulo XIII se darán las razones del interés filosófico de la sintaxis y la semántica inscriptivas, las cuales están en relación fundamentalmente con el finitismo y el nominalismo. Pero las inscripciones tienen también interés por otros motivos. Para dar una descripción semántica adecuada de un lenguaje que contenga una o varias de las llamadas *particularidades egocéntricas* (palabras como 'yo', 'aquí', 'este', etc.) parece esencial hacer referencia a las inscripciones [1]; éstas se hallan también en íntima relación con las teorías del conociniento fenomenistas, como la que presenta Goodman en *The Structure of Appearance*; y, finalmente, las inscripciones son importantes en determinados estudios sobre lingüística empírica [2].

Debido a lo poco que se ha trabajado, hasta la fecha, la teoría inscriptiva, el contenido de este capítulo y del siguiente se propone aquí de un modo algo provisional. Goodman y Quine han establecido su fundamento sintáctico y aquí hacemos una tentativa de axiomatización, primera e imperfecta, de lo que parece ser esencialmente su teoría. Su trabajo consistió en una mera serie de definiciones, de suerte que el sistema resultante no estaba sino parcialmente formalizado (en el sentido del capítulo I). Pero, puesto que los axiomas y las definiciones se hallan tan estrechamente entrelazados en todo lenguaje formalizado, es importante especificar aquí por completo cuáles son los axiomas; intentamos también construir una semántica sobre la base de la sintaxis. Estos capítulos contienen, por tanto, una tentativa de compendio del trabajo que se ha realizado hasta la fecha sobre las inscripciones; esperamos que sean útiles para aquellas personas que puedan querer perfeccionar las diversas teorías, dar axiomas que requieran menos medios, aclarar sus fundamentos metafísicos o epistemológicos, etc.

A. Preliminares sintácticos

Ocupémonos primero de los reajustes sintácticos que hayan de hacerse en el contenido del capítulo III (reajustes que serán comunes a los dos metalenguajes inscriptivos que vamos a construir). Ya hemos indicado el más importante: a saber, que no es necesario tomar un número infinito de inscripciones como valores para las variables. Llamaremos *MI* al metalenguaje inscriptivo sintáctico que vamos a formular ahora.

MI es un metalenguaje de primer orden muy estricto. Sus elementos primitivos lógicos son los mismos que antes (en III), es decir,

'v', '~', '(', ')', 'ɜ',

pero omitiendo '=', por ser este símbolo definible, como veremos.

[1] Véanse, p. ej., B. Russell, *An Inquiry into Meaning and Truth* (Allen and Unwin, London, 1940) [versión castellana, *Investigación sobre el significado y la verdad*, Losada, Buenos Aires, 1946], capítulo VII.

[2] Véanse, p. ej., N. Chomsky, «Systems of Syntactic Analysis», *The Journal of Symbolic Logic*, 18 (1953), pp. 242-56.

Como variables del metalenguaje usamos '*a*', '*b*', etc., con o sin primas o subíndices numéricos. Las reglas *R1-R6*, *MP*, *Gen* y *Abst* de (II, A y D) son las reglas lógicas de *MI*.

Los lenguajes objeto *L* han de tomarse como en el capítulo III. Hacemos, sin embargo, un ligero cambio en el modo de tratar la abstracción en *L*. En lugar de '∃' escribiremos ')', y, por tanto,

'x)A'

en lugar de

'x∃A'

Este empleo del paréntesis derecho aislado no dará lugar a ninguna confusión. En *MI* podemos usar '∃', pero en *L* usaremos ')' en su lugar. La razón de esta ligera modificación está en relación con la existencia de inscripciones de *L*, como resultará evidente dentro de un momento.

Veamos ahora los símbolos descriptivo-estructurales de *MI*. Aquí no podemos considerar que, por ejemplo, '*pd*' representa ')': ello se debe a que hasta ahora hemos usado las comillas del modo clásico, según el cual el signo ' ')' ' representa en realidad la clase de todas las inscripciones cuya figura es la de un paréntesis derecho. Como ya hemos indicado, estas clases no son valores para las variables de *MI*. Podríamos pensar entonces que '*pd*' debe representar alguna inscripción de paréntesis derecho concreta, escogida por adelantado como típica: diríamos entonces que una inscripción *a* es un paréntesis derecho de *L* si *a* es lo bastante parecida a *pd*; pero para ello necesitaríamos en *MI* la frase 'lo bastante parecido a'. Mejor que introducir esto, podemos considerar que '*pd*' y sus similares son *predicados primitivos monádicos* de *MI*. Puesto que '*pd*' ha de desempeñar el papel de predicado primitivo, lo escribiremos con '*p*' mayúscula, de acuerdo con la convención adoptada en (III, D): 'Pd *a*' ha de ser significativo aquí y deberá leerse 'la inscripción *a* es un paréntesis derecho'. De modo similar, léase

'Pi *a*' como '*a* es un paréntesis izquierdo',
'Uve *a*' como '*a* es una *uve*',
'Tilde *a*' como '*a* es una *tilde*',
'Id *a*' como '*a* es un símbolo de identidad',
'Ac *a*' como '*a* es un acento',
'Pe *a*' como '*a* es una *pe*'

y

'Qis *a*' como '*a* es una *qis*'.

'Pi', 'Pd', ..., y 'Qis' serán constantes predicativas primitivas, monádicas y descriptivo-estructurales de *MI*.

Además de estas ocho constantes predicativas primitivas, necesitamos el encadenamiento, así como otros dos conceptos sintácticos. Podríamos, como en *M*, tomar '⌢' como funtor primitivo; pero entonces supondríamos siempre que '(*a*⌢*b*)' era un *término* de *MI*; mas supongamos que *a* y *b* son ambas inscripciones de longitud muy grande: ¡podría suceder entonces que (*a*⌢*b*) fuese demasiado largo para caber dentro del mundo espacio-temporal! En este caso, sucedería que ~(Ec)

$(a^\frown b) = c$, lo cual contradiría al teorema equivalente a *TC1* del capítulo III, según el cual

$$\vdash (a)(b)(\mathrm{E}c)c = (a^\frown b).$$

Por supuesto, no sabemos aún si el equivalente de este teorema ha de ser válido en *MI*. Pero si asumimos que toda inscripción es idéntica a sí misma (en un sentido que ha de definirse) y admitimos que '$(a^\frown b)$' sea siempre un término, se sigue el equivalente de *TC1*. Luego parece preferible manejar el encadenamiento de otro modo.

'*a* C *b,c*' expresará que la inscripción *a* es la cadena de las inscripciones *b* y *c*; 'C' se tomará como símbolo de relación primitivo de *MI* en lugar del funtor '$^\frown$'; '*a* C *b,c*' debe entenderse de forma que, dadas *b* y *c* como inscripciones, *a* se componga de *b* seguida de *c* en su orientación respectiva normal. '*a* C *b,c*' no se da cuando, por ejemplo, *a* se compone de *b* seguida de la inscripción *c* boca abajo. La idea de una orientación respectiva de *b* y *c* está contenida en el significado de 'C'; también está implicada una noción de orden: si *a* C *b,c* entonces ~*a* C *c,b*. Pero el orden que implica el encadenamiento puede darse de muy variadas maneras: puede exhibirse explícitamente, como, por ejemplo, cuando *b* y *c* son perceptibles y contiguos de algún modo en el tiempo y en el espacio; o también puede darse '*a* C *b,c*' cuando el orden de *b* y *c* esté simplemente descrito o sea descriptible. No basta para dar una cadena con dar sus componentes: también hay que estipular o dar de un modo u otro en qué orden deben tomarse los caracteres.

El encadenamiento ha de entenderse también de forma que si *a* C *b,c* entonces *b* y *c* no tengan ningún carácter tipográfico en común (naturalmente, *b* y *c* pueden contener caracteres que sean semejantes entre sí, como varios Pi o Uve u otros, pero no pueden contener ambos un mismo carácter). Esta exigencia parece esencial si tenemos en cuenta que las inscripciones están dispuestas como líneas impresas: el mismo carácter no podría aparecer, digamos, a la vez como letra segunda y trigesimosegunda de una línea impresa. Se sigue de esta condición que no existe una cadena de un carácter consigo mismo.

Si existe una infinidad de caracteres tipográficos de *L*, entonces, como ya hemos sugerido antes, se admite la existencia de todas las cadenas, cualesquiera que sean. Si existe sólo un número finito, digamos k_0, entonces se admite la existencia de todas las inscripciones cuya longitud sea menor o igual que la de k_0. En otras palabras, las cadenas del número (finito) de caracteres tipográficos pueden tomarse de todas las maneras posibles. El número de inscripciones de longitud k_0 es $k_0!$ (es decir, $k_0 \times (k_0 - 1) \times (k_0 - 2) \times \ldots \times 2 \times 1$); el número de inscripciones de longitud $k_0 - 1$ es $k_0 \times (k_0 - 1) \ldots \times k_0 - (k_0 - 1) + 1$; de longitud $k_0 - 2$, $k_0 \times (k_0 - 1) \times \ldots \times k_0 - (k_0 - 2) + 1$; y así sucesivamente. ($k_0!$ es el número de permutaciones de k_0 objetos tomados de k_0 en k_0; $k_0 \times (k_0 - 1) \times \ldots \times k_0 - r + 1$ es el número de permutaciones de k_0 objetos tomados de r en r, para $(1 \leqq r \leqq k_0)$.) Es obvio que el número de todas las inscripciones de *L* es la suma de estos números. El supuesto de que existan todas estas cadenas parece razonable cuando se reflexiona sobre la inmensa cantidad de inscrip-

ciones de *L* disponibles en todo el ámbito del espacio y del tiempo, pasado, presente y futuro, aquí, allá y en todas partes.

Obsérvese que, al hablar acerca de *MI*, hemos seguido hablando de la manera clásica, esto es, considerando las expresiones de *MI* como figuras, no como inscripciones. Este modo de hablar, que hemos venido usando constantemente, es el habitual. Si hubiésemos de considerar las expresiones de *L* como inscripciones, no tendríamos la comodidad, por ejemplo, de usar las clásicas comillas; pero si quisiéramos, podríamos considerar las expresiones de *MI* como inscripciones, como mostrará el contenido de este capítulo.

Para definir los conceptos sintácticos básicos con relación a *L*, se requieren en *MI* dos relaciones sintácticas más como primitivas. '*a* Parte *b*' expresará que la inscripción *a es una parte de* la inscripción *b*, guardando el orden de izquierda a derecha de *b*. Por ejemplo, una inscripción como

$$()x\mathrm{vv}$$

es una parte de la inscripción

(1) $$(x)\mathrm{v}x{\sim}\mathrm{vv}.$$

Pero ninguna inscripción como

(2) $$\sim x($$

es una parte de la inscripción (1), aun cuando todo carácter de (2) es semejante a un carácter de (1).

La identidad de inscripciones es definible en términos de 'Parte':

'$a = b$' abrevia '(a Parte b . b Parte a)'.

'*a* Mlrg *b*' expresará que la inscripción *a es más larga que b* en el sentido de que contiene un mayor número de caracteres. 'Mlrg' se requiere como elemento primitivo sintáctico adicional.

Ya se han descrito los axiomas lógicos de *MI*. Las *Reglas de sintaxis* de *MI* comprenden adaptaciones de *RSin1*-*RSin3* de *M*, junto con reglas de existencia, reglas acerca de Parte y Mlrg y una especie de regla de inducción.

Las primeras reglas son reglas de existencia, que estipulan que se dispone de *al menos* tal y tal número de Pi, Pd, etc.

RSinIn1a. $\vdash (\mathrm{E}a_1)\,\mathrm{E}a_2) \ldots (\mathrm{E}a\,)(\mathrm{Pi}\,a_1 \,.\, \mathrm{Pi}\,a_2 \,.\, \ldots \,.\, \mathrm{Pi}\,a_n \,.\, a_1 \neq a_2 \,.\, a_1 \neq a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_1 \neq a_n \,.\, a_2 \neq a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_{n-1} \neq a_n)$, siendo $n = k_1$ y k_1 el número de Pi si existe sólo un número finito de ellos, o $n = 1, 2, \ldots$ si su número es infinito.

Se admiten reglas análogas referentes a Pd, Uve, Tilde, etc. Podemos llamarlas *RSinIn1b*-*RSinIn1h*, respectivamente. k_2 es el número de Pd, k_3 el de Uve, etc., si este número es finito (podemos considerar que estos números, incluyendo a k_1, son muy elevados, si bien finitos); k_0, el número total de caracteres de *L*, es, pues, precisamente la suma de $k_1, \ldots, k_8$. Naturalmente, no seremos nunca capaces de dar verdaderos valores numéricos a k_1, etc.; para los fines que nos proponemos basta con que sean lo bastante elevados.

Podríamos querer también dar reglas según las cuales existieran *a lo sumo* k_1 Pi, k_2 Pd y así sucesivamente, si existe sólo un número finito de cada uno de éstos; pero semejantes reglas no son necesarias para lo que nos proponemos ahora.

La regla siguiente enuncia que ningún Pi es una Tilde, ninguna Uve es una Tilde, etc.

RSinIn2. $\vdash (a)(\sim(\text{Pd } a \text{ . Pi } a) \text{ . } \sim(\text{Pd } a \text{ . Uve } a) \text{ . } \sim(\text{Pd } a \text{ . Tilde } a) \text{ . } \ldots \text{ . } \sim(\text{Ay } a \text{ . Qis } a))$.

El concepto de *carácter tipográfico de L* puede definirse del modo siguiente:

'Car a' abrevia '(Pi a . v . Pd a . v . Uve a . v . Tilde a . v . Id a . v . Ac a . v . Pe a . v . Qis a)'.

La siguiente regla estipula que ningún carácter es una cadena:

RSinIn3. $\vdash \text{Car } a \text{ . } \supset \text{ . } \sim(\text{E}b)(\text{E}c)a \text{ C } b,c$.

La regla siguiente da las circunstancias en las cuales dos cadenas son idénticas. Esta ley es análoga a *RSin3* de *M*.

RSinIn4. $\vdash a' \text{ C } a,b \text{ . } d' \text{ C } c,d : \supset : a' = d' \text{ . } \equiv \text{ . } (a = c \text{ . } b = d : \text{v} : (\text{E}e)(b \text{ C } e,d \text{ . } c \text{ C } a,e : \text{v} : a \text{ C } c,e \text{ . } d \text{ C } e,b))$.

Tenemos también las siguientes reglas referentes a las relaciones Mlrg, Parte y C.

RSinIn5. $\vdash a \text{ Parte } b \text{ . } \equiv \text{ . } (c)(c \text{ Parte } a \text{ . } \supset \text{ . } c \text{ Parte } b)$.

RSinIn6. $\vdash a \text{ Mlrg } b \text{ . } b \text{ Mlrg } c : \supset : a \text{ Mlrg } c$.

RSinIn7. $\vdash \sim a \text{ Mlrg } a$.

RSinIn8. $\vdash a \text{ Parte } b : \supset : b \text{ Parte } a \text{ . v . } b \text{ Mlrg } a$.

RSinIn9a. $\vdash a = b \text{ . } a \text{ Mlrg } c : \supset : b \text{ Mlrg } c$.

RSinIn9b. $\vdash a = b \text{ . } c \text{ Mlrg } a : \supset : c \text{ Mlrg } b$.

RSinIn9c. $\vdash a = b \text{ . } a \text{ C } c,d : \supset : b \text{ C } c,d$.

RSinIn9d. $\vdash a = b \text{ . } c \text{ C } a,d : \supset : c \text{ C } b,d$.

RSinIn9e. $\vdash a = b \text{ . } c \text{ C } d,a : \supset : c \text{ C } d,b$.

RSinIn10. $\vdash c \text{ C } b,c \text{ . } \supset \text{ . } \sim a \text{ C } c,b$.

RSinIn11. $\vdash a \text{ C } b,c : \supset : b \text{ Parte } a \text{ . } c \text{ Parte } a \text{ . } \sim a \text{ Parte } b \text{ . } \sim a \text{ Parte } c$.

RSinIn12. $\vdash a \text{ C } b,c : \supset : a \text{ Mlrg } b \text{ . } a \text{ Mlrg } c$.

RSinIn13. $\vdash a \text{ C } b,c \text{ . } d \text{ Parte } b : \supset : \sim d \text{ Parte } c$.

RSinIn14. $\vdash \text{Car } a \text{ . } \supset \text{ . } \sim(\text{E}b)a \text{ Mlrg } b$.

RSinIn15. $\vdash \text{Car } a \text{ . } b \text{ Parte } a : \supset : a \text{ Parte } b$ [1].

Todas estas reglas parecen bastante naturales y ayudan a dejar claros algunos de los puntos comentados antes sin formalizar.

Resulta conveniente disponer también de relaciones de encadenamiento de grado superior, definibles del siguiente modo:

'a C b,c,d' abrevia '(Ee)(a C b,e . e C c,d)',

'a C b,c,d,e' abrevia '(Ea')(a C b,a' . a' C c,d,e)',

y así sucesivamente.

Podemos ahora explicitar los supuestos referentes a la existencia de cadenas. Sea (como antes) k_0 el número de caracteres tipográficos de *L*, si es finito; la regla siguiente, o *Regla de existencia*, estipula que existen todas las cadenas posibles de estos k_0 caracteres.

RSinIn16. $\vdash \text{Car } a_1 \text{ . Car } a_2 \text{ . } \ldots \text{ . Car } a_n \text{ . } a_1 \neq a_2 \text{ . } a_1 \neq a_3 \text{ . } \ldots \text{ . } a_1 \neq a_n \text{ . } a_2 \neq a_3 \text{ . } \ldots \text{ . } a_2 \neq a_n \text{ . } \ldots \text{ . } a_{n-1} \neq a_n : \supset : (\text{E}b)b \text{ C } a_1,\ldots,a_n \text{ . } (\text{E}b)b \text{ C } a_2,a_1,a_3,\ldots,a_n \text{ . } (\text{E}b)b \text{ C } a_1,a_3,a_2,\ldots,a_n) \text{ . } \ldots \text{ . } (\text{E}b)b \text{ C } a_n,a_{n-1},\ldots,a_1$.

[1] La forma de esta regla fue sugerida por Mr. ANDREW WESSEL.

Debe entenderse que la conclusión de esta regla contiene, para un n dado, precisamente $n!$ términos conyuntivos distintos, cada uno de los cuales enuncia que existe una cadena de los n caracteres tomados en uno de los órdenes posibles. Si k_0 es realmente el número de caracteres tipográficos de L, entonces n ha de ser sucesivamente 2, 3, ..., k_0. Pero si existe una infinidad de caracteres, n ha de ser sucesivamente 2, 3, ..., de forma que en este caso se admita la existencia de todas las posibles cadenas de longitud finita.

Antes de establecer la próxima regla, una *Regla de figuras*, conviene introducir la definición que sigue. Sea 'S' con un subíndice numérico el signo que represente cualquiera de los predicados primitivos descriptivo-estructurales, es decir, 'Pi', 'Pd', 'Uve', 'Tilde', 'Ac', 'Id', 'Pe' o 'Qis'. Se define entonces

'$(S_1S_2...S_n)$ a' como una abreviación de '$(Eb_1)(Eb_2)...(Eb_n)(S_1\ b_1\ .\ S_2\ b_2\ .\ ...\ .\ S_n\ b_n\ .\ a$ C $b_1,b_2,...,b_n)$' . ($n = 2,3,...,k_0$, o $n = 2,3,...$.)

Según esta definición, por ejemplo,

'(Qis Ac Qis Tilde Pd) a'

expresa que a se compone de una Qis encadenada a un Ac, a otra Qis, a una Tilde y, por último, a un Pd. Gracias a esta definición se puede especificar de un modo conveniente la figura de las cadenas largas. En lo sucesivo podemos hacer que 'X', con o sin primas o subíndices numéricos, designe cualquiera de los predicados primitivos descriptivo-estructurales o cualquiera de los predicados que introduce esta definición. Llamaremos a estos predicados *predicados de figuras*, porque especifican figuras. Hablaremos también de la *longitud* de X de un modo claro: por ejemplo,

'(Qis Ac Qis Tilde Pd)'

es de longitud 5 y, en general,

'$(S_1S_2...S_n)$'

es de longitud n. Admitimos aquí, como antes para *RSinIn16*, que k_0 es el número total de caracteres tipográficos de L, en caso de que este número sea finito; si esto sucede, haremos poco uso de los predicados de figuras de longitud mayor que k_0. Si, en cambio, el número de caracteres tipográficos de L es infinito, entonces n es aquí sucesivamente 2, 3, 4, etc., de forma que queden definidos los predicados de figuras de todas las longitudes finitas.

La Regla de figuras, que es una especie de regla de inducción análoga a *RSin4* de (III, B), puede leerse ahora así:

RSin17. Si $\vdash$ (a)(X a . $\supset$. F a), para todos los predicados de figuras X de longitud $\leqq k_0$ (siendo k_0 igual que antes), o para todos los predicados de figuras X cualesquiera, entonces $\vdash$ (a)Fa.

Esta regla establece que, si podemos demostrar que todas las inscripciones que tienen una figura dada tienen una propiedad dada y podemos demostrar esto para todos los predicados de figuras (en caso de que su número sea finito) de longitud $\leqq k_0$, entonces podemos demostrar que esta propiedad es atribuible a todas las inscripciones. Si de hecho existe una infinidad de inscripciones, entonces ésta es una regla de inducción infinita; en caso contrario, esta regla es una especie

de regla de enumeración que nos permite inferir, a partir de un número finito de enunciados, un enunciado general acerca de todas las inscripciones, cualesquiera que sean.

B. Algunos teoremas elementales

Demostramos ahora algunos teoremas elementales de la sintaxis inscriptiva.

En primer lugar, tenemos por *RSinIn5* que

TB1a. $\vdash a$ Parte a,

y

TB1b. $\vdash a$ Parte b . b Parte $c : \supset : a$ Parte c.

Usando estos teoremas podemos ir estableciendo poco a poco los teoremas básicos de la identidad.

TB2a. $\vdash a = b$. a Parte $c : \supset :$ Parte c,

y

TB2b. $\vdash a = b$. c Parte $a : \supset : c$ Parte b.

También

TB3a. $\vdash a = a$,

TB3b. $\vdash a = b$. $\supset$. $b = a$,

y

TB4. $\vdash a = b$. $b = c : \supset : a = c$.

De aquí, por *RSinIn9a-RSinIn9e*, utilizando la inducción en el metalenguaje (de *MI*),

TB5. $\vdash a = b$. F $a : \supset :$ F b.

También, por *RSinIn4*, tenemos inmediatamente la ley asociativa para el encadenamiento.

TB6. $\vdash c$ C a,e . b C e,d . a' C a,b . d' C $c,d : \supset : a' = d'$.

Aplicando *RSinIn11*,

TB7. $\vdash a$ C $b,c : \supset : \sim a = b$. $\sim a = c$.

También, según *RSinIn13*,

TB8. $\vdash a$ C b,c . $\supset$. $\sim$(Ed)(d Parte b . d Parte c).

Luego también

TB9. $\vdash a$ C b,c . $\supset$. $\sim b = c$.

Por *TB9* y *TB7*, tenemos que

TB10. $\vdash \sim a$ C b,b . $\sim a$ C a,b . $\sim a$ C b,a.

Una consecuencia inmediata de *RSinIn4* es la ley de unicidad para el encadenamiento.

TB11. $\vdash a$ C b,c . d C $b,c : \supset : a = d$.

No asumimos la ley de existencia, según la cual

(*a*)(*b*)(E*c*)*c* C *a*,*b*,

ni tampoco su negación: podría suceder que hubiese inscripciones bastantes para justificar esta ley, pero no admitimos este supuesto.

Otra forma de *RSin10* es

TB12. $\vdash a$ C b,c . d C $c,b : \supset : \sim a = d$.

En vista de *RSinIn15*, tenemos que

TB13a. $\vdash$ Pi a . b Parte $a : \supset :$ Pi b,

TB13b. $\vdash$ Pd a . b Parte $a : \supset :$ Pd b,

y así sucesivamente.

C. Definición de 'Fmla' [1]

Nos ocuparemos ahora de algunas definiciones de la sintaxis inscriptiva análogas a las de (III, D). Estas definiciones son preparatorias para la del concepto de *fórmula*.

'*a* InI *b*' y '*a* Acab *b*' pueden definirse como en (III, D), pero sustituyendo respectivamente las expresiones '$b = (a \frown c)$' y '$b = (c \frown a)$' de los definientia por '*b* C *a*,*c*' y '*b* C *c*,*a*'; pero '*a* Ini *b*' debe leerse aquí 'la *inscripción a* inicia la *inscripción b*', y análogamente ocurrirá con las otras relaciones. También '*a* Seg *b*' es definible aquí como (III, D): adviértase que '*a* Seg *b*' significa que *a* es una parte *continua* de *b*, mientras que '*a* Parte *b*' se verifica aun cuando *a* esté formada por fragmentos *dispersos* de *b*. Si *a* Seg *b* entonces *a* Parte *b* para todo *a* y para todo *b*, pero no a la inversa.

El concepto de *sarta de acentos* es definible aquí esencialmente lo mismo que en *M*.

'SartaAc *a*' abrevia '(*b*)(Car *b* . *b* Parte *a* : ⊃ : Ac *b*)'.

Una inscripción *a* es una variable de *L* si y sólo si es una Qis o una Qis seguida de una SartaAc.

'Vbl *a*' abrevia '(Qis *a* . v . (E*b*)(E*c*)(Qis *b* . SartaAc *c* . *a* C *b*,*c*))'.

El concepto de constante predicado primitiva de *L* puede definirse esencialmente como en el capítulo III.

'ConsPredPrim *a*' abrevia '(Pe *a* . v . (E*b*)(E*c*)(E*d*)(E*e*)(E*a*′)(Pe *b* . Ac *c* . Ac *d* . Ac *e* . Ac *a*′ : *a* C *b*,*c* . v . *a* C *b*,*c*,*d* . v . *a* C *b*,*c*,*d*,*e* . v . *a* C *b*,*c*,*d*,*e*,*a*′))'.

Esta definición y la siguiente presuponen, como en el capítulo III, que *L* contiene justamente cinco constantes predicado primitivas y que 'P' es de grado 1, 'P″' de grado 2, 'P‴' de grado 3, 'P⁗' de grado 4 y 'P⁗′' de grado 5.

El concepto de *fórmula atómica* de *L* es también fácilmente definible.

'FmlaAt *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(E*d*)(E*e*)(E*a*′)(E*b*′)(E*c*′)(E*d*′)(E*e*′)(E*a*″)(E*b*″)(Vbl *b* . Vbl *c* . Vbl *d* . Vbl *e* . Vbl *a*′ . Id *b*′ . Pe *c*′ . Ac *d*′ . Ac *e*′ . Ac *a*″ . Ac *b*″ : *a* C *b*,*b*′,*c* . v . *a* C *c*′,*b* . v . *a* C *c*′,*d*′,*b*,*c* . v . *a* C *c*′,*d*′,*e*′,*b*,*c*,*d* . v . *a* C *c*′,*d*′,*e*′,*a*″,*b*,*c*,*d*,*e* . v . *a* C *c*′,*d*′,*e*′,*a*″,*b*″,*b*,*c*,*d*,*e*,*a*′)'.

La etapa siguiente en la construcción de la sintaxis inscriptiva es la definición del concepto de fórmula, como podrían hacer esperar las consideraciones del capítulo III. Surge espontáneamente la idea de utilizar el método de ingredientes enmarcados; pero no damos cabida aquí a expresiones de todas las longitudes finitas (recordemos que, según el método de los ingredientes enmarcados, una expresión *a* es una fórmula si y sólo si existe una expresión *b* de la cual *a* es un ingrediente enmarcado y tal que todo ingrediente enmarcado de *b* sea o bien una fórmula atómica o bien la negación o el resultado de la cuantificación, o, etc., de ingredientes anteriores de *b*). Supongamos que *a* sea una fórmula de gran longitud: al tomar las expresiones como inscripciones, para una *a* lo bastante larga podría no existir ninguna

[1] El contenido de los §§ C-D debe todos sus aspectos esenciales a Goodman y Quine *(op. cit.)*.

inscripción *b* del tipo que requiere esta definición; por este motivo, el método de los ingredientes enmarcados no da resultado cuando tomamos las expresiones como inscripciones. Luego hemos de definir el concepto de fórmula de algún otro modo: para ello hacen falta algunas cuantas definiciones preliminares más.

Dos inscripciones *a* y *b* son *de igual longitud* si y sólo si ninguna de ellas es más larga que la otra.

'*a* IgLng *b*' abrevia '(~*a* Mlrg *b* . ~*b* Mlrg *a*)'.

Dos inscripciones *a* y *b* son *semejantes* o *parecidas* entre sí, si y sólo si son de igual longitud y tales que, para dos inscripciones de igual longitud cualesquiera *c* y *d*, si *c* inicia *a* y *d* inicia *b*, entonces *c* y *d* acaban ambos en Pi, Pd, Uve, Tilde, etc.

'*a* Sem b' abrevia '(*a* IgLng *b* . (*c*) (*d*) (*c* IgLng *d* . *c* Ini *a* . *d* Ini *b* :⊃: (E*e*) (E*e'*) (*e* Acab *c* . *e'* Acab *d* . (Pi *e* . Pi *e'* :v: Pd *e* . Pd *e'* :v: Uve *e* . Uve *e'* :v: Tilde *e* . Tilde *e'* :v: Ac *e* . Ac *e'* :v: Id *e* . Id *e'* :v: Pe *e* . Pe *e'* :v: Qis *e* . Qis *e'*))))'.

Una inscripción *a* es una *cuantificación* de *b* si y sólo si *a* se compone de un cuantificador universal prefijado a *b*.

'*a* Cuant *b*' abrevia '(E*c*) E*d*) (E*e*) (Pi *c* . Vbl *d* . Pd *e* . *a* C *c,d,e,b*)'. Este concepto es análogo al definido en (III, D), pero aquí usamos 'Cuant' en lugar de 'Gen': 'Gen' se reserva para otro uso más adelante.

Una inscripción *a* es una *negación* de *b* si y sólo si *a* se compone de una Tilde prefijada a *b*.

'*a* N *b*' abrevia '(E*c*) (Tilde *c* . *a* C *c,b*)'.

Y *a* es una *disyunción* de *b* y *c* cuando *a* se compone de un Pi encadenado a *a* encadenado a Uve, luego a *b* y, por último, a un Pd.

'*a* D *b,c*' abrevia '(E*d*) (E*e*) (E*a'*) (Pi *d* . Uve *e* . Pd *a'* . *a* C *d,b,e,c,a'*)'.

Para la definición de *fórmula* que hemos de dar necesitamos un concepto algo más estricto que el de D. Es necesario exigir, no sólo que *a* D *b,c*, sino también que la Uve que esta relación implica sea el *principal* signo conectivo de *a* y que los paréntesis iniciales y finales de *a* sean *simétricos*. En otras palabras, debemos exigir también que *b* y *c* contengan exactamente tantos paréntesis izquierdos como derechos y que esto no sea verdadero de ninguna inscripción (que no sea *a*) que inicie *a*.

En primer lugar, por tanto, necesitamos el concepto de *contener tantos paréntesis izquierdos como derechos*. ¿En qué circunstancias una inscripción *a* tendrá esta propiedad? Si *a* no contiene ningún paréntesis, la tendrá; y también la tendrá si separamos la parte de *a* que contenga sólo paréntesis izquierdos (dispersos) y la parte que contenga sólo paréntesis derechos y exigimos que ambas partes sean de igual longitud.

'IgPar *a*' abrevia '(~(E*b*) (*b* Seg a : Pi *b* .v. Pd *b*) .v. (E*b*) (E*c*) (*b* IgLng *c* . (*d*) (Car *d* . ⊃ . (Pi *d* . *d* Seg *a* :≡: *d* Seg *b*)) . (*d*) (Car *d* . ⊃ . (Pd *d* . *d* Seg *a* :≡: *d* Seg *c*)))'.

Podemos ahora decir que una inscripción *a* es una *disyunción* de *b* y *c* en sentido *estricto* siempre que *b* y *c* tengan ambos la propiedad IgPar, que no existan *e* y *d* tales que IgPar *d* y *a* C *d,e* (es decir, que ningún segmento inicial de *a* distinto de *a* tenga la propiedad IgPar) y que *a* D *b,c*.

'*a* D_E *b,c*' abrevia '(IgPar *b* . IgPar *c* . ~(E*d*) (E*e*) (IgPar *d* . *a* C *d,e*) . *a* D *b,c*)'.

Se dice también que una inscripción *a* resulta de *b* por *abstracción* como sigue:

'*a* Abst *b*' abrevia '(E*c*) (E*d*) (E*e*) (Vbl *c* . Vbl *d* . Pd *e* . *a* C *c,e,b,d*)'.

Recordemos que estamos escribiendo los abstractos en *L* empleando ')' en lugar de 'ɜ'. Luego *a* resulta de *b* por abstracción si *a* se compone de una variable seguida de un paréntesis derecho seguido de *b* seguido de una variable.

Podemos ahora definir el concepto de fórmula en dos etapas. En primer lugar, una *casi-fórmula a* es una fórmula atómica, una disyunción en sentido estricto de ciertos *b* y *c*, una negación o una cuantificación de determinado *b* o resulta por abstracción de determinado *b*.

'CasiFmla *a*' abrevia '(FmlaAt *a* .v. (E*b*) (E*c*) (*a* D_E *b,c* .v. *a* N *b* .v. *a* Cuant *b* .v. *a* Abst *b*))'.

Entonces una *fórmula a* es una casi-fórmula en la cual: cada disyunción (en sentido estricto) contenida en *a* tiene por (sus dos) componentes o miembros casi-fórmulas, cada negación contenida en *a* es la negación de una casi-fórmula, cada cuantificación contenida en *a* es el resultado de la cuantificación de una casi-fórmula y, para todo *b* y para todo *c*, si *b* está contenida en *a* y resulta de *c* por abstracción, entonces *c* es una casi-fórmula.

'Fmla *a*' abrevia '(CasiFmla *a* . (*b*) (*c*) (*d*) (*b* D_E *c,d* . *b* Seg *a* :⊃: CasiFmla *c* . CasiFmla *d*) . (*b*) (*c*) ((*b* N *c* .v. *b* Cuant *c* .v. *b* Abst *c*) . *b* Seg *a* :⊃: CasiFmla *c*))'.

No todas las casi-fórmulas son fórmulas, porque, por ejemplo, no es necesario que los miembros de las disyunciones y negaciones sean fórmulas; pero las fórmulas en el sentido aquí dado comprenden precisamente las inscripciones que pretendemos. Véamoslo. En primer lugar, una fórmula *a* ha de ser una casi-fórmula. Exigimos, además, que los miembros disyuntivos de toda disyunción (estricta) que sea un segmento de *a* sean también casi-fórmulas: partiendo del miembro disyuntivo más largo que sea un segmento de *a*, sus dos miembros disyuntivos han de ser casi-fórmulas; si alguno de los dos componentes es, a su vez, una disyunción, sus dos miembros disyuntivos han de ser casi-fórmulas, y así sucesivamente. Y lo mismo para las negaciones, las cuantificaciones o las abstracciones. Podemos continuar de este modo hasta que lleguemos a fórmulas atómicas. Luego una fórmula en el sentido definido es una fórmula en el sentido intuitivo de poder construirse a partir de fórmulas atómicas por medio de un número finito de etapas de negación, disyunción, cuantificación universal o abstracción.

Indiquemos por qué necesitamos D_E en vez de D en las definiciones de 'CasiFmla' y 'Fmla'. Supongamos que **A**, **B** y **C** sean realmente formas de fórmulas atómicas. Entonces, por ejemplo, desearíamos que una inscripción de la forma

(1) '((**A** v **B**) v **C**)'

fuese una fórmula. Pero observemos que una inscripción de esta forma

es en realidad la disyunción (en el vago sentido de D) de una inscripción de la forma

'(A'

con una de la forma

'B) v C'.

Pero ninguno de estos componentes es a su vez una casi-fórmula. Por lo tanto, si usamos 'D' en lugar de 'D_E' en las definiciones de 'Casi-Fmla' y 'Fmla', las inscripciones de la forma (1) dejarían de ser fórmulas. ('A', etc., se usan aquí en el sentido del capítulo II.)

También será necesaria la siguiente abreviación:

'*a* C_E *b,c*' abrevia '(E*d*) (E*e*) (E*a'*) (*d* N *b* . *e* N *c* . *a'* D_E *d,e*. *a* N *a'*)'. '*a* C_E *b,c*' guarda con la conyunción la misma relación que '*a* D_E *b,c*' con la disyunción.

D. Definición de 'Teor'

Damos ahora una definición del concepto de teorema. Tampoco aquí podemos hacer uso del método de ingredientes enmarcados, por razones parecidas a las que impidieron su empleo en la definición de 'Fmla': si hubiésemos de definir 'Teor *a*' para expresar que existe una inscripción *b* de la cual *a* (o una inscripción semejante a *a*) es un ingrediente enmarcado, cada ingrediente enmarcado del cual o es un axioma o puede obtenerse a partir de ingredientes enmarcados anteriores por medio de una de las reglas de deducción, necesitaríamos que dado el *a* apropiado existiese siempre tal *b*. El concepto de teorema puede, sin embargo, definirse de otro modo, como vamos a ver.

Necesitamos primero el concepto de axioma, que es definible mediante una adaptación del método del capítulo III. Para ello introducimos una abreviación:

'*a* CM *b,c*' abrevia '(E*d*) (*d* N *b* . *a* D_E *d,c*)'.

Una inscripción *a* es un *condicional material* de *b* y *c* si y sólo si existe una inscripción *d* que sea una negación de *b*, y *a* es una disyunción estricta de *d* y *c*. Podemos definir ahora lo que significa decir que una inscripción *a* es un axioma de funciones veritativas del primer tipo.

'AxFV1 *a*' abrevia '(E*b*) (E*c*) (E*d*) (E*a'*) (Fmla *b* . *b* Sem *c* . *c* Sem *d* . *a'* D_E *b,c*. *a* CM *a'*, *d*)'.

De un modo parecido se definen 'AxFV2 *a*', 'AxFV3 *a*', y 'AxFV4 *a*'.

Antes de definir el concepto de axioma de cuantificación, nos hace falta definir los de *variable libre de* y *sustitución*.

Una variable *a* es una *variable libre* de una inscripción *b* si y sólo si *a* es un segmento de *b* que no va seguido en *b* de ningún acento adicional y es tal que *a* no aparece en (no es un segmento de) ningún segmento de *b* que se componga de una fórmula a la cual esté prefijado un cuantificador compuesto por un Pi, una variable semejante a *a* y un Pd.

'*a* VLb *b*' abrevia '(Vbl *a* . *a* Seg *b* . (*c*) (*d*) (Ac *d* . *c* C *a,d* :⊃: ~*c* Seg *b*) . (*a'*) (*b'*) (*c'*) (*d'*) (*e'*) (Pi *a'* . *a* Sem *b'* . Pd *c'* . Fmla *d'* . *e'* C *a',b',c',d'* . *e'* Seg *b* :⊃: ~*a* Seg *e'*))'.

El concepto de sustitución fue definido en el capítulo III usando el método de ingredientes enmarcados; no disponemos aquí de este método por razones que ya hemos indicado. Queremos definir lo que significa decir que una fórmula *a* difiere de una fórmula *d* sólo en que contiene variables libres *semejantes a b* allí donde *d* contiene variables libres *semejantes a c*. Es evidente que *a* y *d* guardarán entre sí esta relación si exigimos que cierta inscripción que resulte de *d* por supresión de *todas* las variables libres semejantes a *c* sea semejante a determinada inscripción que resulte de *a* por supresión de *algunas* variables libres semejantes a *b*. De aquí que

'*a* SLb$^{b}_{c}$ *d*' abrevia '(Fmla *a* . Fmla *d* . Vbl *b* . Vbl *c* . (E*a*') (E*b*') (*a*' Sem *b*' . (*c*') (Car *c*' :⊃: ((*d*') (*d*' Sem *c* . *d*' VLb *d* :⊃: ~*c*' Seg *d*') . *c*' Seg *d* :≡: *c*' Seg *b*')) . (*c*') (Car *c*' . (*d*') (*d*' Sem *b* . *d*' VLb *a* :⊃: ~*c*' Seg *d*') :⊃: (*c*' Seg *a* . ≡ . *c*' Seg *a*')))))'.

Podemos definir ahora el que una inscripción sea un AxCuantl.

'AxCuantl *a*' abrevia '(E*b*) (E*c*) (E*d*) (E*e*) (E*a*') (E*b*') (E*c*') (E*c*'') (Pi *a*' . Pd *b*' . *d* C *a*', *c*,*b*', *b* . *c*' Sem *c* . *e* SLb$^{c''}_{e}$ *b* . *a* CM *d*,*e*)'.

De un modo análogo pueden definirse 'AxCuant2 *a*', 'AxId1 *a*' y 'AxId2 *a*'; las definiciones son parecidas a las del capítulo III. Aún hay que hacer un ligero cambio en la definición de axioma de abstracción, 'AxAbst *a*', debido al empleo de ')' en *L* en lugar de 'ɜ'. Entonces el concepto de *axioma lógico* de *L* puede definirse esencialmente lo mismo que en (III, E):

'AxLog *a*' abrevia '(AxFV1 *a* .v. . . . . .v. AxAbst *a*)'.

De un modo parecido puede definirse el concepto de *axioma no lógico* o descriptivo de *L*. 'Ax *a*' simbolizará, pues, que *a* es un axioma lógico o un axioma no lógico de *L*.

Una inscripción *a* es una *consecuencia inmediata* de unas inscripciones *b* y *c* si puede obtenerse a partir de *b* y *c* mediante aplicación del Modus Ponens o a partir de *b* mediante la Regla de generalización. Luego,

'*a* CI *b*,*c*' abrevia '(*a* MP *b*,*c* .v. *a* Gen *b*)'.

en donde

'*a* MP *b*,*c*' abrevia '(E*d*) (E*e*) (E*a*') (*a* Sem *d* . *c* Sem *e* . *b* Sem *a*' : *a*' CM *e*,*d* .v. *e* CM *a*',*d*)',

y

'*a* Gen *b*' abrevia '(E*c*) (*c* Cuant *b* . *a* Sem *c*)'.

Estos conceptos son parecidos a los correspondientes del capítulo III, pero con cláusulas adicionales referentes a la semejanza.

Recordamos que una *demostración* es, en general, una serie de fórmulas tales que cada una de ellas o es un axioma o puede obtenerse a partir de fórmulas anteriores por medio de las reglas de deducción: diremos que cada una de estas fórmulas es una *etapa*. Una demostración será habitualmente una inscripción compuesta de varias etapas. Digamos, con más precisión, que *a* es una *etapa* de *b*, siendo *a* y *b* inscripciones cualesquiera, siempre que *a* sea una fórmula y una parte de *b* y siempre que *a* no sea parte de ninguna otra fórmula que a su vez sea parte de *b*.

'*a* Etapa *b*' abrevia '((*c*) (Fmla *c* . *a* Parte *c* . *c* Parte *b* :⊃: *a* = *c*). Fmla *a* . *a* Parte *b*)'.

Decir que *a* no es parte de ninguna otra fórmula que sea parte de *b* es decir, evidentemente, que toda fórmula *c* de la cual *a* sea parte y que sea parte de *b* será idéntica a *a*. Dado el concepto de etapa, podemos entrar en el de demostración.

Consideremos cualquier inscripción *b* que contenga como partes algunas etapas de una inscripción *a* (ninguna de las cuales será un axioma); sea entonces alguna etapa de *a* (que sea parte de *b*) consecuencia inmediata de etapas de *a* que no sean partes de *b;* si, dado *a*, esto es válido para todo *b* cualquiera que sea, podemos decir que la inscripción *a* es una *demostración.*

'Dems *a*' abrevia '(*b*)((E*c*)(*c* Etapa *a* . *c* Parte *b*) . (*c*) (Ax *c* . *c* Etapa *a* :⊃: ~*c* Parte *b*) :⊃: (E*c*)(E*d*)(E*e*)(*c* Etapa *a* . *c* Parte *b* . *d* Etapa *a* . ~*d* Parte *b* . *e* Etapa *a* . ~*e* Parte *b* . *c* CI *d*,*e*))'.

Hemos de indicar ahora que una demostración *a* en este sentido es de hecho una demostración en el sentido del capítulo III, según el cual una demostración es una serie de fórmulas $d_1, \ldots, d_n$, cada una de las cuales o bien es un axioma o bien puede obtenerse a partir de etapas anteriores por medio de una regla de deducción. A fin de ver tal cosa mostraremos primero que si *a* es una demostración en el sentido de esta definición, entonces puede especificarse un orden en las etapas de *a* tal que cada etapa sea un axioma o una consecuencia inmediata de etapas anteriores. Dado *a*, separamos ante todo aquellas etapas de *a* que son axiomas; supongamos que éstas son $d_1, \ldots, d_k$. Consideremos ahora una parte *b* de *a* que se componga de todas las etapas de *a* excepto $d_1, \ldots, d_k$; si *a* es una demostración, esta parte *b* contendrá una etapa que será una consecuencia inmediata de las etapas de *a* exteriores a *b:* llamemos d_{k+1} a esta etapa. Consideremos después otra parte *c* de *a* compuesta de todas las etapas de *a* excepto $d_1, \ldots, d_{k+1}$; esta parte contendrá, asimismo, una etapa que será consecuencia inmediata de las etapas de *a* exteriores a *b:* llamemos a esta etapa d_{k+2}. Y continuemos la operación hasta agotar todas las etapas de *a:* de este modo logramos una serie de fórmulas $d_1, \ldots, d_k, \ldots, d_n$ que constituye una demostración en sentido intuitivo.

Ahora, inversamente, supongamos que tenemos una serie de fórmulas $d_1, \ldots, d_n$ que constituya una demostración en sentido intuitivo, en la cual cada fórmula de $d_1, \ldots, d_n$ sea una etapa de *a*. Podemos mostrar entonces que *a* es una demostración en el sentido de la definición dada del modo siguiente. Consideremos una inscripción cualquiera *b* que contenga algunas etapas de *a*, ninguna de las cuales sea un axioma. De entre estas etapas de *a* que son partes de *b* escojamos la primera en el orden que hemos supuesto; suponiendo que es d_i, d_i debe ser (puesto que $d_1, \ldots, d_n$ constituye una demostración en sentido intuitivo) o bien un axioma o bien una consecuencia inmediata de las etapas anteriores. Pero no es un axioma, por estar contenida en *b;* luego d_i es una consecuencia inmediata de etapas de *a* no incluidas en *b*. Por tanto, *b* contiene por lo menos una etapa de *a* que es consecuencia inmediata de etapas de *a* exteriores a *b*. Vemos así que *a* debe

ser una demostración en el sentido de la definición, por ser *b* cualquier inscripción de *L* que contenga algunas etapas de *a*, pero de las cuales ninguna sea un axioma.

A base de este concepto de demostración, podemos definir el concepto de 'Teor' del siguiente modo:

'Teor *a*' abrevia '(E*b*) (*a* Etapa *b* . Dems *b*)'.

De forma que una inscripción *a* es un teorema si y sólo si es una etapa de alguna demostración.

De un modo parecido podemos definir el concepto de 'TeorLog *a*', alterando la definición de 'Dems *a*' de forma que sólo incluya axiomas lógicos.

También podemos dar por definidos cualesquiera otros conceptos sintácticos que puedan ser necesarios. En particular, 'Prop *a*', 'FuncPropUna *a*,*b*', 'ConsPred *a*' 'PropUnivAt *a*', 'PropUniv *a*', etc., han de definirse ahora de modo esencialmente igual que en (III, F), con sólo los ligeros cambios necesarios. Por ejemplo, *a* es ahora una función proposicional de la variable única *b* si y sólo si *a* es una fórmula y *b* una variable, cuando *b* es una variable libre de *a* entonces toda variable libre de *a* es semejante a *b*, y cuando *b* no es una variable libre de *a* entonces *a* no contiene ninguna variable libre. También establecemos que

'SartaCuant *a*' abrevia aquí '((E*b*) (E*c*) (Pi *b* . Pd *c* . (E*d*)*a* C *b*,*d*,*c* . (*a*′)(*b*′)(*c*′)(*d*′)(Pi *b*′ . Pd *d*′ . *a*′ C *b*′,*c*′,*d*′ . *a*′ Seg *a* : ⊃ : Vbl *c*′ .v. (E*e*)(E*e*′)(E*e*″)(Pd *e*′ . Pi *e*″ . *e* C *e*′,*e*″ . *e* Seg *c*′))) . (*b*)(*c*)(*d*) (Pi *b* . Pd *c* . *d* C *b*,*c* : ⊃ : ~*d* Seg *a*))'.

'*a* Clau *b*' y '*a* Clau′ *b*' pueden definirse después del mismo modo, en lo esencial, que en (III, F).

E. Algunos teoremas ulteriores

Antes de entrar en la semántica inscriptiva nos detenemos para indicar, sin dar demostraciones, unos cuantos teoremas sintácticos más.

Observamos primero que pueden demostrarse en la sintaxis inscriptiva teoremas análogos a los de (III, C), que enuncian propiedades elementales de la operación clásica de encadenamiento. Ya hemos demostrado en el § B algunos de estos teoremas; en este parágrafo expondremos unos cuantos más, así como algunos teoremas que no tienen equivalentes directos en la teoría clásica.

Tenemos primero una regla de inducción análoga a TC3*a* (III).

TE1. Si ⊢ (*a*) (Car *a* . ⊃ . F *a*) . (*a*)(*b*)(*c*)(F *b* . F *c* . *a* C *b*,*c* : ⊃ : F *a*), entonces ⊢ (*a*) F *a*.

('F' se utiliza aquí, como siempre, en el sentido de (II, D).) La demostración se basa en *RSinIn17*. Tenemos después unos cuantos teoremas referentes a los conceptos definidos en los §§ C-D.

TE2a. ⊢ *a* Seg *b* . ⊃ . *a* Parte *b*.

TE2b. ⊢ ~(*a*)(*b*)(*a* Parte *b* . ⊃ . *a* Seg *b*).

TE2c. ⊢ *a* Seg *a*.

TE2d. ⊢ *a* Seg *b* . *b* Seg *c* : ⊃ : *a* Seg *c*.

TE3a. ⊢ IgPar *a* . IgPar *b* . (*c* D *a,b* .v. *c* N *a* .v. *c* Cuant *a*) :⊃: IgPar *c*.

TE3b. ⊢ IgPar *b* . *a* Abst *b* :⊃: ~IgPar *a*.

TE4a. ⊢ Fmla *a* . Fmla *b* . *c* D *a,b* . *d* D_E *a,b* :⊃: *c* Sem *d*.

TE4b. ⊢ Ax *a* .⊃. Fmla *a*.

TE4c. ⊢ Fmla *a* . Fmla *b* . *c* CI *a,b* :⊃: Fmla *c*.

Tenemos también los siguientes teoremas referentes a la semejanza:

TE5a. ⊢ *a* Sem *a*.

TE5b. ⊢ *a* Sem *b* . *b* Sem *c* :⊃: *a* Sem *c*.

TE5c. ⊢ *a* Sem *b* .⊃. *b* Sem *a*.

TE5d. ⊢ *a* Sem *b* . *c* C *a,e* . *d* C *b,e* :⊃: *c* Sem *d*.

TE5e. ⊢ *a* Sem *b* . *c* C *e,a* . *d* C *e,b* :⊃: *c* Sem *d*.

TE5f. ⊢ *a'* C *a,b* . *d'* C *c,d* . *a* Sem *c* . *b* Sem *d* :⊃: *a'* Sem *d'*.

TE5g. ⊢ *a'* C *a,b* . *d'* C *c,d* . (E*e*)(E*e'*)(E*a''*)(E*d''*)(*e* Sem *e'* . *a* Sem *a''* . *d* Sem *d''* . *b* C *e,d''* . *c* C *a'',e'*) :⊃: *a'* Sem *d'*.

TE5h. ⊢ *a'* C *a,b* . *d'* C *c,d* :⊃: *a'* Sem *d'* .≡. ((*a* Sem *c* . *b* Sem *d*) .v. (E*e*)(E*e'*)(E*a''*)(E*d''*)(*e* Sem *e'* . *a* Sem *a''* . *d* Sem *d''* . *b* C *e,d''* . *c* C *a'',e'*) .v. (E*e*)(E*e'*)(E*b''*)(E*c''*)(*e* Sem *e'* . *b* Sem *b''* . *c* Sem *c''* . *a* C *c'',e* . *d* C *e',b''*)).

TE5i. ⊢ *a* Sem *b* . Fmla *a* :⊃: Fmla *b*.

TE5j. ⊢ *a* Sem *b* . Teor *a* :⊃: Teor *b*.

Un principio muy importante es el siguiente, cuyo papel en la sintaxis inscriptiva es algo parecido al de la Regla de ingredientes enmarcados (*TG4* de (III)) en la sintaxis clásica. Este principio, llamado *Regla de demostración*, establece que si, (i) *a* es una etapa de determinada demostración *b*, (ii) todo axioma de *L* tiene determinada propiedad y (iii) esta propiedad está incluida en la relación de consecuencia inmediata, entonces *a* tiene también esta propiedad.

TE6. ⊢ *a* Etapa *b* . Dems *b* . (*c*)(Ax *c* .⊃. F *c*) . (*c*)(*d*)(*e*) (F *c* . F *d* . *e* CI *c,d* :⊃: F *e*) :⊃: F *a*.

TE6 se demuestra apoyándose principalmente *RSinIn17*.

También tenemos los siguientes teoremas, que pueden ser útiles más adelante:

TE7a. ⊢ Teor *a* .⊃. Fmla *a*.

TE7b. ⊢ Teor *a* . Teor *b* . *c* CI *a,b* :⊃: Teor *c*.

TE8a. ⊢ PropUnivAt *a* .⊃. (E*b*)(E*c*)(Pi *b* . *a* C *b,c*).

TE8b. ⊢ Prop *a* :⊃: PropUnivAt *a* .v. (E*b*)(Prop *b* . *a* N *b*) .v. (E*b*)(E*c*)(Prop *b* . Prop *c* . *a* D_E *b,c*).

TE8c. ⊢ Prop *a* . *a* D_E *b,c* :⊃: Prop *b* . Prop *c*.

F. Denotación múltiple y verdad [1]

Nos ocuparemos ahora de los metalenguajes inscriptivos *semánticos* que presuponen *MI* como parte sintáctica. Llamaremos MSI_b^L al primer metalenguaje semántico de *L:* se tomará como único elemento

[1] El contenido de los §§ F-G sigue en lo esencial a Martin y Woodger, *op. cit.* Pero aquí no se supone la existencia de una infinidad de inscripciones, lo cual constituye una importante mejora sobre la formulación de estos autores.

primitivo semántico una relación de denotación múltiple. Esta relación es esencialmente la misma que la tratada en el capítulo IV, pero su dominio se compone ahora de inscripciones o signos sucesos, no de signos figuras: '*a* Den *x*' se lee ahora 'la inscripción *a* denota el objeto *x*'. También aquí, como en el capítulo IV, las formas '*x* Den *x*'', '*x* Den *a*' y '*a* Den *b*' se consideran carentes de sentido.

MSI^L_D, como hace patente el párrafo anterior, es un metalenguaje traducente: por ello ha de contener traducciones de todos los símbolos primitivos de *L*. Como en el capítulo IV, usaremos los propios símbolos de *L* para representar sus traducciones, por razones de comodidad: MSI^L_D contiene, como MS^L_D, dos géneros de variables, uno de los cuales toma los objetos de *L* como valores, mientras que el otro considera como inscripciones las expresiones de *L*; como en MS^L_D, puede considerarse, si se quiere, que estos dos tipos de objetos constituyen dos dominios recíprocamente excluyentes.

Los conceptos siguientes pueden definirse en MSI^L_D de modo esencialmente igual que en (IV, C): '*a* Sub *b*', '*a* Cmpr *b*', '*a* CoExt *b*', 'Com *a*', 'Unit *a*', 'Nula *a*', 'Univ *a*', '*a* Ext F', '*a* Sum *b*,*c*', '*a* Prod *b*,*c*' y '*a* Neg *b*'.

Nos ocupamos ahora de una definición de verdad. Definimos primero la verdad en cuanto aplicada a proposiciones universales atómicas, esencialmente de igual manera que en (V, A). Es decir, establecemos que

(I) 'Vrd_1 *a*' abrevia '(PropUnivAt *a* . (E*b*)(E*c*)(Pi *c* . *a* C *c*,*b* . (*x*) *b* Den *x*)'.

Advirtamos que esta definición no contradirá la restricción acerca de la longitud de las inscripciones admisibles: en efecto, dada una inscripción *a*, el *b* que aquí utilizamos aparece siempre como parte de *a*, esto es, simplemente como resultado de quitar a *a* su primer paréntesis izquierdo (el disponer siempre de *b* de este modo fue la razón que nos indujo a usar paréntesis derechos aislados en vez de epsilones invertidas para escribir los abstractos en *L*). Pero si exigimos que *b* difiera de *a* en que se haya tachado el primer paréntesis izquierdo de *a* y que luego el primer paréntesis derecho de *a* esté sustituido por algún tipo nuevo de inscripción de la forma 'ɜ', nos falta la seguridad de que exista el *b* resultante: ¡*a* podría ser tan larga que todas las inscripciones de la forma 'ɜ' estuviesen ya contenidas en ella! Pero, como hemos visto, no es necesario emplear aquí 'ɜ' dentro de *L*. La definición (I) requiere que el *b* que implica sea universal y, por supuesto, sólo es válida para proposiciones universales atómicas.

Si intentamos complementar esta definición con una definición análoga a la de '$\text{Vrd}_2 a$' dada en (V, A), utilizando formas normales conyuntivas, tropezamos con una dificultad: dando una longitud suficiente a *a*, la forma normal conyuntiva tendría que ser demasiado larga para existir. Por ello, hemos de rechazar esta forma de definición.

A continuación podríamos considerar el uso de las formas normales prenexuadas, como en la definición (III) de (V, B). Pero también en este caso podríamos encontrar dificultades acerca de la existencia de una forma normal prenexuada para una *a* de suficiente longitud. Por ejemplo, supongamos que *a* es de la forma

(1) '$(x')(\sim(x)\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$',

donde **A** y **B** están en la notación primitiva y no contienen cuantificadores y 'x' no aparece libre en **B**; y supongamos que a es tan larga que contiene todas las Tildes, por ejemplo, comprendidas en la totalidad del espacio y del tiempo. Escrita en la notación primitiva, una forma normal prenexuada de a sería de la forma

(2) '$(x')\sim(x)\sim(\sim\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$'.

Para escribir esto hemos de tener dos Tildes más de las que están contenidas en a; por lo tanto, aun cuando a pudiera existir, una inscripción de la forma (2) no existiría. Lo mismo puede decirse de cualquier otra forma normal prenexuada de a. (De nuevo, '**A**' y '**B**' se usan aquí esencialmente en el sentido del capítulo II.)

Naturalmente, podríamos usar la norma artificial de exigir que todas las proposiciones de L fuesen proposiciones universales atómicas: en este caso, (I) proporcionaría una definición de verdad para L completamente general. Pero tal exigencia sería algo *ad hoc*, por lo cual procuraremos no plantearla si podemos evitarlo.

Veamos, por tanto, otro tipo de definición de verdad en el cual los objetos verdaderos que se consideran son las *propiedades de figura* y no las inscripciones. La desventaja de este procedimiento es que requiere una notación algo más complicada; en cambio, nos permitirá efectuar una definición de verdad aplicable a todas las proposiciones reales de L sin tener en cuenta su longitud.

'**A**', con o sin subíndices o primas, designará en lo sucesivo cualquier fórmula de MSI_D^L. Diremos que un predicado de figura **X** es la *descripción estructural* de **A**, siendo **A** una fórmula de la parte traducente del metalenguaje en las debidas circunstancias. Por ejemplo,

'(Pi Qis Pd Qis Id Qis)'

es la descripción estructural de '$(x)x = x$'. También diremos que un predicado de figura **X** es una *proposición universal atómica* contenida en **X'**, si **X** es la descripción estructural de una **A**, la cual a su vez sea una proposición universal atómica contenida en **A'**, y **X'** es la descripción estructural de **A'**.

Teniendo en cuenta esta notación sintáctica, podemos proceder directamente a la definición del concepto de verdad. La definición tiene dos partes, aproximadamente análogas a las dos partes de la definición dada en (V, A). La primera definición se refiere a las proposiciones universales atómicas; la segunda, a las proposiciones universales que no son atómicas. Se presupone la definición de '$\mathrm{Vrd}_1\ a$' dada más arriba como (I).

(IIa) '$\mathrm{F}_i\mathrm{V}_1\ \mathbf{X}$' abrevia '$(\mathrm{E}a)(\mathbf{X}\ a\ .\ \mathrm{Vrd}_1\ a)$'.

(IIb) '$\mathrm{F}_i\mathrm{V}_2\ K$' abrevia '$(\mathrm{E}a)(\mathbf{X}\ a\ .\ \mathrm{PropUniv}\ a\ .\ \sim\mathrm{PropUnivAt}\ a\ .\ \mathbf{A})$', en donde $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ son exactamente las proposiciones universales atómicas que constituyen **X** (tomadas en el orden de aparición en **X** de izquierda a derecha), **X** es la descripción estructural de una fórmula **A'** de la parte traducente de MSI_D^L, $\mathbf{X}_k$ es la descripción estructural de $\mathbf{A}_k$ ($1 \leqq k \leqq n$) y **A** sólo difiere de **A'** en que contiene '$\mathrm{FV}_1\ \mathbf{X}_k$' allí donde **A'** contiene $\mathbf{A}_k$.

Podemos escoger aquí para n cualquier número entero $\geqq 2$, pero no mayor que cierto número entero m_0, siendo m_0 el número de proposiciones universales atómicas (contando las repeticiones) que aparezcan en la inscripción más larga de L que sea una proposición. Por supuesto, es muy poco probable que podamos dar nunca un valor numérico concreto a m_0; pero si el universo es finito en el sentido apropiado, entonces existe este número. Si el universo no es finito, sea entonces $n = 2, 3 \ldots$.

(IIa y IIb) contituyen juntas una definición completamente general dentro de MSI_D^L de lo que se entiende por *figura verdadera* de L.

'F_iV X' abrevia '$(F_iV_1$ X .v. F_iV_2 X)'.

Consideremos algunos ejemplos de estas definiciones. (I) es bastante obvia, por su estrecha relación con (I) de (V, A). Consideremos ahora una proposición universal atómica de L, digamos '$(x)x = x$'. El ejemplo correspondiente de (IIa) es aquél en que el definiendum es

'F_iV_1 (Pi Qis Pd Qis Id Qis)',

que se define como

'(Ea)((Pi Qis Pd Qis Id Qis) a . (Eb)(Ec)(Pi c . a C c,b . (x)b Den x))'.

Luego, la figura '$(x)x = x$' es una figura verdadera si y sólo si existe al menos una inscripción que tenga esta figura y que sea verdadera en el sentido de (I).

Consideremos también un sencillo ejemplo de (IIb). Sea '$((x)x = x$ .v. $\sim(x)$Px)' la proposición en L del caso: se trata de una proposición universal no atómica de L, y

'(Pi Pi Qis Pd Qis Id Qis Uve Tilde Pi Qis Pd Pe Qis Pd)'

es su descripción estructural. Abreviemos tal cosa con 'A_0'. Por (IIb), 'F_iV A_0' es una forma breve de

'(Ea)(A_0 a . PropUniv a . $\sim$PropUnivAt a : F_iV_1 (Pi Qis Pd Qis Id Qis) .v. $\sim F_iV_1$ (Pi Qis Pd Pe Qis))'.

A_0 es una figura verdadera de L si y sólo si existe una proposición universal no atómica de L que tiene esta figura y si, o bien '$(x)x = x$' es una figura verdadera o bien '(x)Px' no es una figura verdadera. Lo mismo puede decirse de casos más complicados.

Los axiomas de MSI_D^L comprenden axiomas lógicos análogos a los de (IV, D) (pero no axiomas de identidad), las reglas sintácticas antes dadas, *RSinIn1a-RSinIn17*, traducciones de los axiomas no lógicos de L (que incluyen axiomas de identidad) junto con reglas semánticas análogas a la de MS_D^L.

Sea '**x**', etc., la representación arbitraria de cualquier variable traducente de MSI_D^L. La primera regla semántica es entonces la siguiente:

RSemIn1. $\vdash$ **X** a .$\supset$. (**x**) (a Den **x** .$\equiv$. **---x---**), si, (i) '**---x---**' es una función proposicional de la variable única **x** de la parte traducente de MSI_D^L y **X** es la descripción estructural de un abstracto '**x**)**---x---**', o (ii) **x** es 'Pe' y '**---x---**. es 'P**x**'.

Esta regla estipula, por ejemplo, que

$\vdash$ (Qis Pd Qis Id Qis) a .$\supset$. (x)(a Den x . $\equiv$. $x = x$).

La segunda regla es esencialmente como en MS_D^L.

RSenIn2. $\vdash$ a Den x .$\supset$. ConsPred a.

Estas son las únicas reglas semánticas necesarias.

La coherencia de MSI_D^L con relación a la de *MI* y *L* juntos puede mostrarse muy probablemente mediante una adaptación del razonamiento de (V, G).

Citamos ahora unos cuantos lemas *sintácticos*, algunos de los cuales serán necesarios más adelante.

TF1a. ⊢ X *a* . *a* C *c*,*b* . Pi *c* :⊃: X′ *b*, si X es la descripción estructural de una proposición universal atómica, '(x)---x---', de la parte traducente de MSI_D^L y X′ es la descripción estructural del abstracto 'x)---x---'.

TF1b. ⊢ X *a* . ⊃ . PropUnivAt *a*, si (etc., para X como en *TF1a*).

TF2a. ⊢ X *a* :⊃: (E*b*)X_1 *b*.(E*b*)X_2*b*. .... (E*b*)X_n *b*, siendo X la descripción estructural de una proposición universal no atómica y X_1, ..., X_n las proposiciones universales atómicas que constituyen X.

TF2b. ⊢ X *a* :⊃: PropUnivAt *a* . ~PropUnivAt *a*, si (etc., acerca de X como en *TF2a*).

TF2c. ⊢ X *a* . ⊃ . Prop *a*, si X es la descripción estructural de una proposición.

TF3. ⊢ X *a* . Qis *b* . Pd *c* . *e* Sem *a* . *d* C *b*,*c*,*e*, :⊃: X′ *d*, si X es la descripción estructural de una proposición '------' y X′ es la descripción estructural de un abstracto vacío '*x*)------'.

TF4a. ⊢ Prop *a* . ⊃ . (E*b*)(*b* Parte *a* . Pd *b*).

TF4b. ⊢ Prop *a* . ⊃ . (E*b*)(*b* Parte *a* . Vbl *b*).

G. Adecuación

¿Qué significa decir que el predicado de verdad 'F_iV' es un predicado *adecuado*? Sólo hemos de hacer unos ligeros cambios en la definición de adecuación dada en (V, C); en particular, debemos introducir en ella una cláusula referente a la existencia de inscripciones. Diremos, por lo tanto, que el predicado 'F_iV' es un predicado *adecuado* para lo que se entiende por figura verdadera en *L* si y sólo si cada fórmula de *MSIn* de la forma

(T) '(E*a*)X *a* :⊃: F_iV X . ≡ . A'

es demostrable en MSI_D^L, siendo A una proposición de la parte traducente de MSI_D^L y X su descripción estructural.

Para demostrar la adecuación en este sentido ligeramente modificado suelen emplearse, naturalmente, los axiomas semánticos. La demostración tiene dos partes, que corresponden a (IIa) y (IIb) de la definición. Demostramos primero el caso en que A es una proposición universal atómica, para lo cual mostramos, en primer lugar, que

(1) ⊢ (E*a*)X *a* . F_iV_1 X :⊃: (*x*)---*x*---,

siendo X la descripción estructural de '(*x*)---*x*---' (proposición universal atómica de la parte traducente de MSI_D^L). Empleando *RSemIn1* y la definición (IIa), tenemos que

(2) ⊢ X *a* . PropUnivAt *a* . Pi *c* . *a* C *c*,*b* . (*x*)*b* Den *x* . X′ *b* :⊃: (*x*) (*b* Den *x* . ≡ . ---*x*---),

si X es la descripción estructural de '(*x*)---*x*---' y X′ la de '*x*)---*x*---'. Luego, por *TF1a*,

$\vdash$ **X** *a* . PropUnivAt *a* . Pi *c* . *a* C *c*,*b* . (*x*)*b* Den *x* :$\supset$: (*x*) ---*x*---, en donde (etc.). De aquí sacamos inmediatamente (1). Ahora, inversamente,

$\vdash$ (*x*)(*b* Den *x* . $\equiv$. ---*x*---) . (E*a*) (E*c*) (**X** *a* . PropUnivAt *a* . Pi *c* . *a* C *c*,*b*) . (*x*)---*x*---. **X**′ *b* :$\supset$: (E*a*) (E*b*)(E*c*)(**X** *a* . PropUnivAt *a* . Pi *c* . *a* C *c*,*b* . (*x*)*b* Den *x*).

en donde (etc., como en (2)). Podemos abandonar la hipótesis innecesaria por *RSemInl*, y utilizar la definición (IIa). Tenemos entonces que

$\vdash$ (E*a*)(E*b*)(E*c*)(**X** *a* . PropUnivAt *a* . Pi *c* . *a* C *c*,*b* . **X**′ *b*) . (*x*)---*x*--- :$\supset$: F_iV_1**X**,

en donde (etc., como en (2)). Eliminamos la hipótesis

'**X**′ *b*'

por *TF1a*. Empleando *TE8a*, tenemos que

$\vdash$ (E*a*)(**X** *a* . PropUnivAt *a*) . (*x*)---*x*--- :$\supset$: V_iF_1**X**,

en donde (etc., acerca de **X**). Pero, según *TF1b*, podemos eliminar 'PropUnivAt *a*'.

De aquí obtenemos, aplicando también (1), que

(3) $\vdash$ (E*a*) **X** *a* :$\supset$: (*x*)---*x*--- . $\equiv$. F_iV_1**X**,

en donde (etc.).

Demostramos ahora la adecuación para (IIb), es decir, que

(4) $\vdash$ (E*a*)**X** *a* :$\supset$: F_iV_2**X** . $\equiv$. **A**′,

siendo **X** la descripción estructural de **A**′ y **A**′ una proposición universal no atómica (demostramos tal cosa aplicando repetidamente (3)). Escojamos $\mathbf{X}_1$,..., $\mathbf{X}_n$ como en la definición (IIb), es decir, como las proposiciones atómicas universales que constituyen **X**. Sea $\mathbf{X}_k$ ($1 \leqq k \leqq n$) la descripción estructural de $\mathbf{A}_k$, y sea **A** tal que difiera de **A**′ sólo por contener 'F_iV_1 $\mathbf{X}_k$' allí donde **A**′ contiene $\mathbf{A}_k$. Por (3) tenemos evidentemente que

$\vdash$ (E*a*) $\mathbf{X}_1$ *a* :$\supset$: F_iV_1 $\mathbf{X}_1$. $\equiv$. $\mathbf{A}_1$,

$\vdash$ (E*a*) $\mathbf{X}_2$ *a* :$\supset$: F_iV_1 $\mathbf{X}_2$. $\equiv$. $\mathbf{A}_2$,

etcétera, y

$\vdash$ (E*a*) $\mathbf{X}_n$ *a* :$\supset$: F_iV_1 $\mathbf{X}_n$. $\equiv$. $\mathbf{A}_n$.

Combinando estas fórmulas tenemos que

(5) $\vdash$ (E*a*) $\mathbf{X}_1$ *a* . (E*a*) $\mathbf{X}_2$ *a* . . . . . (E*a*) $\mathbf{X}_n$ *a* . (E*b*)(**X** *b* . PropUniv *b* . ~PropUnivAt *b*) :$\supset$: (E*b*)(**X** *b* . PropUniv *b* . ~PropUnivAt *b* . **A**) . $\equiv$. **A**′,

en donde (etc.). Pero de aquí sacamos (4), simplificando la hipótesis en virtud de *TF2a* y *TF2b*.

Combinando (3) y (4) obtenemos la

Regla de adecuación 1. $\vdash$ (E*a*) **X** *a* :$\supset$: F_iV **X** . $\equiv$. **A**, si **X** es la descripción estructural de **A** y **A** es una proposición de la parte traducente de MSI_D^L.

H. Verdad y abstractos vacíos

Aparece espontáneamente otro modo de definir el concepto semántico de verdad para *L* si empleamos los abstractos vacíos como en (V, B). Gracias a este modo podremos definir un predicado de verdad aplicándolo a inscripciones y no solamente a figuras, pero sin encontrar por ello dificultades relativas a la existencia de inscripciones.

Daremos la definición completa en varias etapas. En primer lugar, para proposiciones *a* que no son demasiado largas, podemos decir que *a* es verdadera en *L* si y sólo si un abstracto vacío de *d*, compuesto de una variable encadenada a un Pd encadenado a *a*, denota cada uno de los objetos.

(I) 'Vrd$_1$ *a*' abrevia '(Prop *a* . (E*b*)(E*c*)(E*d*)(Vbl *b* . Pd *c* . *d* C *b*,*c*,*a*. (*x*)*d* Den *x*))'.

Esta definición introduce un concepto de verdad que se aplica a casi todas las proposiciones de *L*. Pero supongamos que *a* fuese tan larga que agotase todo el espacio y el tiempo, es decir, que contuviese todos los caracteres disponibles de *L;* entonces no podríamos tener el *d* que requiere el definiens, pues *d* excede a *a* en dos caracteres tipográficos. Si *a* es una proposición que agota la totalidad del espacio y del tiempo, o al menos en lo que respecta a un carácter tipográfico, por ejemplo, su concepto de verdad no puede expresarse por 'Vrd$_1$'. Sea

'AbstVac *a*' la abreviación de '(Prop *a* . (E*b*)(E*c*)(E*d*)(Vbl *b* . Pd *c* . *d* C *b*,*c*,*a*))'.

Decimos que una proposición *a* tiene un *abstracto vacío*, si y sólo si existe un abstracto *d* compuesto por una variable seguida de un Pd aislado seguido de *a*. 'Vrd$_1$' se aplica únicamente a las proposiciones que tienen un abstracto vacío en este sentido.

Esta limitación puede remediarse completando la definición de 'Vrd$_1$' del modo siguiente: si una proposición *a* tiene un abstracto vacío diremos que tiene la forma (1); si *a* es tan larga que *no* tiene un abstracto vacío, tendrá las formas, (2) de una proposición universal atómica, (3) de una disyunción o (4) de una fórmula que comience con una sarta de Tildes. Es evidente que todas las proposiciones de *L* tendrán una de estas cuatro formas (cf. *TE8b*). En el caso (2),

'Vrd$_2$ *a*' abreviará '(~AbstVac *a* . PropUnivAt *a* . (E*b*)(E*c*) *a* C *b*,*c* . Pi *b* . (*x*)*c* Den *x*))'.

Este caso es análogo al (I) del § F. En el caso, (3), de una disyunción,

'Vrd$_3$ *a*' abreviará '(Prop *a* . ~AbstVac *a* . (E*b*)(E*c*)(*a* D$_E$ *b*,*c* : Vrd$_1$ *b* .v. Vrd$_1$*c*))'.

Aquí una proposición *a* es Vrd$_3$ si y sólo si *b* es Vrd$_1$ o *c* es Vrd$_1$, siendo *a* una disyunción estricta de *b* y *c*. Adviértase que 'Vrd$_1$' es aplicable a *b* y *c* porque estas inscripciones son proposiciones (*TE8c*), y, por ello, contienen por lo menos un Pd (*TF4a*) y por lo menos una Vbl (*TF4b*); por tanto, *c* tiene un abstracto vacío, porque la Vbl y el Pd adicionales vienen siempre dadas por *b*. Lo mismo puede decirse de *b*, porque *c* siempre proporcionará la Vbl y el Pd adicionales.

En el caso (4) tenemos dos posibilidades, según que la sarta de Tildes que haya sea impar o par. Necesitaremos dos definiciones de verdad que requieren algunos conceptos preliminares. Una inscripción *a* es una *sarta par de caracteres tipográficos* si y sólo si es la cadena de dos inscripciones de igual longitud.

'SartaPar *a*' abrevia '(E*b*)(E*c*)(*b* IgLng *c* . *a* C *b*,*c*)'.

Una inscripción *a* es una *sarta de Tildes* si y sólo si todos los caracteres que son segmentos de ella son Tildes.

'SartaTilde *a*' abrevia '(*b*)(Car *b* . *b* Seg *a* :⊃: Tilde *b*)'.

Entonces una inscripción es evidentemente una *sarta par de Tildes* si y sólo si es una sarta par y es una sarta de Tildes.

'SartaParTilde *a*' abrevia '(SartaTilde *a* . SartaPar *a*)'.

Análogamente

'SartaImpTilde *a*' abrevia '(Sarta Tilde *a* . ~SartaPar *a*)'.

(Cf. las definiciones correspondientes de (VII, E).) En el caso, (4), de una sarta par de Tildes, tenemos la siguiente definición de verdad:

'Vrd_4 *a*' abrevia '(Prop *a* . ~ AbstVac *a* . (E*b*)(E*c*)(SartaParTilde *b* . *a* C *b*,*c* . ~(E*d*)(E*e*)(Tilde *d* . *c* C *d*,*e*) . (Vrd_2 *c* .v. Vrd_3 *c*)))'.

Una proposición compuesta de una sarta par de Tildes seguida de una proposición *c* que no comience con una Tilde es verdadera si y sólo si *c* es verdadera; pero esta *c* puede ser una proposición universal atómica o una disyunción, por lo cual podremos aplicarle 'Vrd_2' o 'Vrd_3'.

En el caso, (4), de una sarta impar de Tildes,

'Vrd_5 *a*' abreviará '(Prop *a* . ~AbstVac *a* . (E*b*)(E*c*)(SartaImpTilde *b*. *a* C *b*,*c* . ~(E*d*)(E*e*)(Tilde *d* . *c* C *d*,*e*) . ~(Vrd_2 *c* .v. Vrd_3 *c*)))'.

Podemos definir la verdad con la mayor generalidad mediante una disyunción.

'Vrd *a*' abrevia '(Vrd_1 *a* .v. Vrd_2 *a* .v. Vrd_3 *a* .v. Vrd_4 *a* .v. Vrd_5 *a*)'.

Diremos que este predicado de verdad es adecuado si y sólo si toda fórmula de la forma

'**X** *a* :⊃: Vrd *a* . ≡ . **A**'

es demostrable en MSI^L_D, siendo **A** una proposición de la parte traducente de MSI^L_D y **X** su descripción estructural.

Omitimos la demostración de la adecuación de 'Vrd' en este sentido. El enunciado de esta ley es la *Regla de adecuación 2*. En vista de esta ley y de la *Regla de adecuuación 1* tenemos la siguiente ley de equivalencia:

TH1. ⊢ Prop *a* . **X** *a* :⊃: F_iV **X** . ≡ . Vrd *a*, para todo **X**.

Sobre la base de una de ambas Reglas de adecuación y utilizando la Regla de figuras, podemos demostrar que el lenguaje objeto *L* es coherente, mediante una adaptación de razonamiento dado en (V, E).

Regla de coherencia. ⊢ (*a*)(*b*)(Prop *a* . *b* N *a* :⊃: ~(Teor *a* . Teor *b*)).

Podemos introducir ahora algunos conceptos semánticos ulteriores definibles a partir del concepto de verdad y demostrar sus propiedades fundamentales, como hicimos en (V, F). También podemos desarrollar en MSI^L_D una extensa teoría de las constantes predicativas, según hicimos en (IV, F).

Asimismo, con sólo ligeros cambios, puede tomarse *L* como un lenguaje que contenga una o varias constantes individuales o funcionales primitivas; y entonces puede darse una semántica inscriptiva para *L* siguiendo las directrices del capítulo X (véase más adelante (XII, E)).

Inscripciones y comprensión

En el capítulo anterior formulamos una semántica inscriptiva en la cual se tomaba como elemento semántico primitivo una relación de denotación múltiple. En el presente capítulo trataremos de una semántica inscriptiva basada en una relación de comprensión. La semántica del capítulo anterior era de carácter traducente, por contener *in toto* una traducción del lenguaje objeto *L*; la que ahora formularemos será intraducente, y por ello, afín al metalenguaje semántico MS_O^L. Pero aquí las variables representativas de expresiones tomarán como valores inscripciones, por lo cual el principal problema será el de reconstruir la semántica intraducente de tal forma que no haya que admitir una infinidad de expresiones.

En el § A presentamos los preliminares semánticos, que comprenden algunas *definiciones básicas* y las *Reglas semánticas*. Se dedica el § B a señalar algunos *teoremas elementales*. En el § C se definen el *concepto de verdad* y otros conceptos semánticos que de él derivan. En el § D se demuestra la *coherencia* del lenguaje objeto. Se bosqueja en el § E la teoría de las *constantes individuales y funcionales* dentro de la semántica intraducente. En el § F se desarrolla una *teoría formal de las comillas* dentro de una semántica inscriptiva de tipo traducente. Por último, el § G se dedica a algunos comentarios generales acerca de los metalenguajes semánticos que contienen a la vez inscripciones y figuras como valores para variables.

A. Preliminares semánticos

El elemento semántico primitivo que aquí adoptamos es una relación de comprensión que relaciona inscripciones de un lenguaje objeto *L* dado. Sean '*a*', '*b*', etc., las variables representativas de inscripciones, como en el capítulo anterior; '*a* Cmpr *b*' simbolizará que la inscripción *a* comprende la inscripción *b*. El sentido que asignamos a 'Cmpr' es análogo al del capítulo VIII, de suerte que '*a* Cmpr *b*' tendrá lugar sólo cuando *a* denote todo aquello que denote *b*. Llamemos MSI_O^L, a este metalenguaje semántico, por ser el metalenguaje semántico inscriptivo de *L* basado en la comprensión.

La parte sintáctica de MSI^L_G es la descrita en los parágrafos A-E del capítulo anterior; también los lenguajes objeto son del tipo L allí considerado. En este caso el lenguaje objeto no reaparece traducido en MSI^L_C, de forma que sólo necesitamos una clase de variables: las que representan expresiones. La estrutura de MSI^L_G es, pues, notablemente más sencilla que la de MSI^L_D.

Podemos definir aquí de modo esencialmente igual que en (VIII, B) varios conceptos semánticos, como 'ED a', 'a CoExt b', etc.

Los axiomas lógicos y sintácticos de MSI^L_G son los correspondientes de MSI^L_D. Las reglas semánticas son esencialmente las mismas que en (VIII, D), pero con algunos ligeros cambios debidos a la distinta formulación del encadenamiento. Por razones de comodidad, indicamos a continuación las reglas semánticas en su totalidad, aun cuando algunas sean tipográficamente exactas a las dadas en (VIII, D).

RSemIn1. $\vdash$ ED a . $\equiv$. ConsPred a,

RSemIn2. $\vdash$ a Cmpr b . c Cmpr a :$\supset$: c Cmpr b,

RSemIn3. $\vdash$ (Ed)(Ee)(Ed')(Ee') (FuncPropUna d,e . FuncPropUna d',e' . e Sem e' . (Ea')(Eb')(Pd a' . b' Sem e . b C b',a',d) . (Ea')(Eb')(Pd a' . b' Sem e . c C b',a',d') . (Ea')(Eb')(Ec')(Pd a' . b' Sem e . c' D_E d,d' . a C b',a',c')) .$\supset$. a Sum b,c,

RSemIn4. $\vdash$ Hip (de *RSemIn3*, pero con 'C_E' en lugar de 'D_E') .$\supset$. a Prod b,c,

RSemIn5. $\vdash$ (Ec)(Ed)(Ee)(FuncPropUna c,d . (Eb')(Ed')(d' Sem d . Pd b' . a C d',b',c) . e N c . (Eb') (Ed')(d' Sem d . Pd b' . b C d',b',e')) .$\supset$. b Neg a,

RSemIn6. $\vdash$ d Neg b . c Prod a,d . $\sim b$ Cmpr a :$\supset$: $\sim$Nula c,

RSemIn7. $\vdash$ d Sum a,b . d Cmpr c . (e)(c Cmpr e . (a Cmpr e .v. b Cmpr e) :$\supset$: Nula e) :$\supset$: Nula c,

RSemIn8. $\vdash$ (Eb)(a Clau' b . AxLog b) . (Eb)(Ed)(Vbl b . Pd d . c C b,d,a) :$\supset$: Univ c,

RSemIn9. $\vdash$ Univ a . Nula b :$\supset$: $\sim b$ Cmpr a,

RSemIn10. $\vdash$ FuncPropUna b,a . Vbl a'' . (Ee) (Ea')(Pd e . a' Sem a . c C a',e',b) . Univ c . (Ee)(Ea')(Eb')(Ec')(Pd e . a' Sem a . Pi c' . Pd b' . d C a',e,c',a'',b',b) :$\supset$: Univ d,

RSemIn11. $\vdash$ Prop a . Vbl b . Vbl c . (Ec') (Pd c' . d C b,c',a) . (Eb') (Pd b' . e C c,b',a) :$\supset$: d Cmpr e,

RSemIn12. $\vdash$ Prop a . Vbl b . (Ee)(Pd e . c C b,e,a) :$\supset$: Univ c .v. Nula c,

RSemIn13. $\vdash$ FuncPropUna a,b . b VLb a . d SLb^c_b a . (Eb') (Ec') (b' Sem b . Pd c' . e C b',c',a) . (Eb')(Ec')(b' Sem c . Pd c' . e' C b',c',d) :$\supset$: e Cmpr e',

y

RSemIn14. $\vdash$ Pe a . Pd b . Vbl c . c' Sem c . Pe d . e C c,b,d,c' :$\supset$: a CoExt e.

Estas reglas corresponden estrechamente a las Reglas generales de la comprensión de MS^L_G, y desempeñan dentro del metalenguaje que vamos a formular un papel análogo. Adviértanse, sin embargo, las cláusulas adicionales acerca de la semejanza de inscripciones; éstas son necesarias porque un carácter tipográfico no puede repetirse dentro

de una inscripción (*RSinIn13* en (XI, A)): en vez de repetir un carácter *a* debe usarse otro semejante a *a*.

Obsérvese también que *RSemIn11* y *RSemIn13* difieren de *RGC11* y *RGC13* en que no contienen cláusulas de la forma '$\sim b = c$'. Tampoco tenemos aquí cláusulas de la forma '$\sim b$ Sem c' en su lugar: el motivo de esto es dar lugar al siguiente teorema:

TA1. $\vdash$ ConsPred a . a Sem b :$\supset$: a Cmpr b.

Y de aquí también,

TA2. $\vdash$ a Sem b . a Cmpr c :$\supset$: b Cmpr c,

y

TA3. $\vdash$ a Sem b . c Cmpr a :$\supset$: c Cmpr b.

Por supuesto, también rigen aquí (como en MS_0^L) teoremas análogos a éstos con '=' en lugar de 'Sem'. Si '$\sim b$ Sem c' se tomase como hipótesis adicional en *RSemIn11* y *RSemIn13*, querríamos quizá incluir *TA1* (o bien *TA2* junto con *TA3*) como reglas adicionales.

B. Algunos teoremas

Sobre la base de las reglas semánticas *RSemIn1-RSemIn14*, puede desarrollarse una teoría general de la comprensión dentro de MSI_0^L siguiendo las directrices del capítulo IX. Pueden demostrarse varios teoremas referentes a la comprensión, la coextensividad, las sumas, productos y negaciones semánticos y las constantes predicativas comunes, nulas y universales. Con frecuencia hace falta añadir cláusulas acerca de la semejanza de inscripciones, como las que aparecen en las reglas semánticas inscriptivas. Teniendo presente este ligero cambio, prácticamente todos los teoremas del capítulo IX, §§ A-D, pueden formularse de nuevo de un modo apropiado y demostrarse en MSI_0^L.

C. Verdad y conceptos derivados

De las dos maneras de definir el concepto semántico de verdad que encontrábamos en la semántica inscriptiva del capítulo XI, sólo una puede emplearse aquí. La primera definición dada en (XI, F) emplea fundamentalmente conceptos de la parte traducente del metalenguaje, por lo cual sólo puede darse dentro de la estructura de una semántica traducente; la segunda definición del capítulo XI, en el § H, no emplea traducciones de las expresiones de L y, por ello, puede adaptarse aquí.

En la semántica intraducente de este capítulo, como en la expuesta en los capítulos VIII-IX, debe abandonarse en cierto modo el requisito de que el concepto de verdad definido sea adecuado. Pero, como hemos visto, esto no significa que se niegue en modo alguno la adecuación o que se admita su negación: es más bien que dicho requisito no puede enunciarse para MSI_0^L, porque este metalenguaje no contiene traducciones de las expresiones de L. El abandono de esta exigencia es mucho menos importante de lo que podría haberse supuesto teniendo en cuen-

ta el papel vital que desempeña la adecuación dentro de la semántica traducente. (Véase más adelante, (XIII, F).)

En el próximo capítulo daremos con cierto detalle las razones del interés filosófico de un metalenguaje tan estricto como MSI^L_C.

D. Coherencia y coherencia relativa

Si por un momento tomamos para L el lenguaje S, podemos llevar a cabo la demostración de coherencia de S dentro de MSI^L_C. Los detalles son parecidos a los de (IX, F): en vez de asumir directamente que ciertas constantes predicado de S son universales, tendríamos que tomar aquí (como en el capítulo IX) estos supuestos como hipótesis allí donde fueran necesarios. Las Hipótesis específicas de la comprensión necesarias para S son análogas a las de (IX, E).

Igualmente, la coherencia de MSI^L_C con relación a la de la sintaxis inscriptiva subyacente puede mostrarse muy probablemente mediante una adaptación apropiada del argumento dado en (IX, G).

E. Constantes individuales e inscripciones

Supongamos que L contiene un número finito de constantes individuales como elementos primitivos. Teniendo en cuenta el contenido del capítulo X, el metalenguaje semántico—ya sea traducente o intraducente—sólo requiere unos ligeros cambios. En primer lugar, consideremos de nuevo MSI^L_D.

Sea 'Ay' el predicado primitivo descriptivo-estructural que añadimos. 'Ay *a*' puede leerse '*a* es un carácter con figura de *ay*'. Sean también 'ā', 'ā′', etc., las traducciones dentro de MSI^L_D de las constantes individuales de L. Podemos definir

'Ay′ *a*' como '(E*b*)(E*c*)(Ay *b* . Ac *c* . *a* C *b*,*c*)',
'Ay″ *a*' como '(E*b*)(E*c*)(Ay′ *b* . Ac *c* . *a* C *b*,*c*)',

etcétera, hasta tener un predicado descriptivo-estructural para cada constante individual de L; entonces 'ConsIn *a*' puede definirse por enumeración.

'**a**', con o sin subíndices numéricos, representará cualquier constante individual traducente de MSI^L_D y 'Ay' representará 'Ay', 'Ay″', 'Ay‴', etcétera. También podemos decir que 'Ay' es la *descripción estructural* de 'ā', '(Ay⌢Ac)' la descripción estructural de 'ā″', y así sucesivamente.

La relación consistente en ser un *nombre propio de* es definible dentro de MSI^L_D de modo esencialmente igual que en MS^L_D (X, B).

'*a* NbrPr *x*' abrevia '(ConsIn *a* . (E*b*)(E*c*)(E*d*)(E*e*)(E*a*′)(Vbl *b* . Pd *c* . *d* Sem *b* . Id *e* . *a*′ C *b*,*c*,*d*,*e*,*a*) . *a*′ Den *x*)'.

Tenemos entonces los tres teoremas básicos siguientes referentes a las constantes individuales:

TE1. ⊢ *a* NbrPr *x* . ⊃ . ConsIn *a*.

TE2. ⊢ Ay *a* . ⊃ . *a* NbrPr **a**, si Ay es la descripción estructural de **a**.

TE3. $\vdash$ ConsIn a . a NbrPr x . a NbrPr y : $\supset$: $x = y$.

El manejo de las constantes individuales dentro de MSI_O^L es análogo, utilizando el contenido de (X, D). Tampoco aquí puede introducirse la relación de ser nombre propio de, porque un metalenguaje intraducente carece de las expresiones apropiadas; no obstante, pueden demostrarse importantes propiedades de las constantes individuales, igual que en (X, E).

Si se introducen en L una o varias constantes funcionales como elementos primitivos, MSI_O^L y MSI_C^L sólo necesitan leves modificaciones de acuerdo con lo indicado en (X, F).

F. Teoría formalizada de las comillas

Debido al interés, tan difundido, por la distinción entre uso y mención de las expresiones, la importancia del uso correcto de las comillas cuando se escribe sobre metodología está hoy fuera de dudas; pero rara vez se han formulado reglas precisas para el uso de las comillas, si es que se ha hecho alguna vez: los principios referentes a ellas suelen dejarse a un nivel vago, intuitivo. Por ello, podría tener cierto interés definir de modo formalizado los diversos usos de las comillas dentro de la estructura de un metalenguaje semántico cuidadosamente formulado: formularemos estas definiciones en este parágrafo dentro de la estructura de MSI_D^L (lo hacemos en MSI_D^L en vez de hacerlo en MS_D^L a fin de definir también una función inscriptiva de comillas; daremos algunos teoremas que rigen estas funciones). Se admite ahora que L contiene una o varias constantes individuales primitivas, pero ninguna constante funcional primitiva.

Introduciremos las semicomillas en su sentido habitual, de forma que el resultado de aplicar las semicomillas a un símbolo se entenderá como una figura. Dentro de MSI_D^L, las figuras aparecen como propiedades, *propiedades de figura*, como antes las hemos llamado. Supongamos que ‘‘(’’ está definido como ‘Pi’. Entonces, en lugar de escribir

‘Pi a’

podríamos escribir

‘‘(’ a’.

Debido a que las expresiones que representan figuras sólo aparecen de un modo primitivo dentro de MSI_D^L como constantes predicativas monádicas, las expresiones que contengan comillas aparecerán de igual modo. Pero, igual que antes —en (XI, A)— introdujimos expresiones tales como

‘(S_1 . . . S_n) a’,

así también podemos definir las semicomillas circunscribiendo una larga serie de expresiones.

Utilicemos ‘S_1’, ‘S_2’, etc., como en (XI, A), para representar cualquiera de los predicados primitivos descriptivo-estructurales de MSI_D^L. De un modo análogo, ‘s_1’, ‘s_2’, etc., representarán cualesquiera símbolos traducentes de MSI_D^L

‘(’, ‘)’, ‘$\sim$’, ‘v’, ‘P’, ‘$\bar{a}$’, ‘x’, ‘=’ o ‘ ’.

‘s_1’, etc., son entonces otro tipo de variable sintáctica que ha de ser útil en el metalenguaje de MSI_D^L. Podemos definir ahora

' '$s_1 s_2 \ldots s_n$' a' como '$(S_1 S_2 \ldots S_n)\, a$', si S_i es la descripción estructural de s_i $(1 \leqq i \leqq n)$.
Según esta definición, por ejemplo,

' '$(x)x = x$' a'

enuncia que la inscripción a tiene la figura compuesta por un Pi seguido de una Qis seguida de un Pd seguido de una Qis seguida luego de un Id seguido finalmente de una Qis.

Esta definición introduce formalmente las semicomillas dentro de MSI_D^L. En rigor, la utilidad de semejante definición es algo limitada: las figuras no son valores para variables en MSI_D^L y sus expresiones aparecen únicamente como predicados. Tampoco pueden ser las figuras nombres propios, en virtud de *TE1*: sólo las *inscripciones* de L denotan o pueden ser nombres propios y deben ser constantes individuales o predicado de L.

Sin embargo, la definición normal de las semicomillas aquí dada no es una mera curiosidad gratuita. Podemos imaginar que alguien que usase MSI_D^L desde su infancia encontraría esta definición interesante; supongamos que no ha utilizado nunca las comillas. Nuestro imaginario personaje habría absorbido desde su infancia todos los comentarios no formalizados dados anteriormente acerca de MSI_D^L, de forma que habría llegado a conocer MSI_D^L de modo parecido a como los niños llegan a conocer su lengua materna; podría haber observado las semicomillas en tratados lógicos o en cualquier otra parte y haberse preguntado por su significado. El esquema de definición dado proporciona un significado apropiado y que para él sería realmente informativo.

Sería inútil objetar a esta definición que hace falta una buena cantidad de comillas para enunciarla, de forma que para captar su sentido debe entenderse ya cómo se usan las comillas. Para construir con cuidado cualquier sistema lingüístico hemos de usar las comillas *dentro del metalenguaje* y si lo hacemos seremos capaces de manejarlas correctamente. Pero esto es algo muy diferente de dar una definición formal de las comillas tal como aparecen en un metalenguaje semántico tomado como lenguaje objeto.

Una función de las comillas más interesante es de índole inscriptiva (siendo las inscripciones valores para variables dentro de MSI_D^L, hallaremos algunos usos de ellas que tienen bastante interés). La definición presupone la función ε de Hilbert (II, F). Establecemos que

'$\cdot s_1 \ldots s_n \cdot$' abrevia '$(\varepsilon a\ .\ (S_1 S_2 \ldots S_n)\, a)$', siendo S_i la descripción estructural de s_i $(1 \leqq i \leqq n)$ y $n \geqq 2$,

y que

'$\cdot s_1 \cdot$' abrevia '$(\varepsilon a\ .\ S_1\, a)$', si S_1 es la descripción estructural de s_1.
Según esta definición,

$$\cdot(x)x = x\cdot,$$

por ejemplo, es cualquier inscripción que tenga la forma

'$(x)x = x$'.

Pero las expresiones ε sólo están definidas en un contexto, de forma que

'$\cdot(x)x = x\cdot$'

sólo está definido contextualmente. Luego, según la definición, puede decirse que

$$\cdot(x)x = x\cdot$$

tiene una propiedad dada Q si y sólo si existe al menos una inscripción de la figura '$(x)x = x$' y toda inscripción que tenga esta figura tiene la propiedad Q.

Con frecuencia, en la teoría de las inscripciones queremos hablar de cualquier inscripción que tenga tal y cual figura y adscribir a *toda* inscripción de este tipo alguna propiedad general. La función inscriptiva de comillas que acabamos de definir facilita semejantes enunciados. Por ejemplo, decir que todo Ay es un nombre propio del individuo ā es decir que

$$(\varepsilon a \ .\ \text{Ay}\ a)\ \text{NbrPr}\ \bar{a},$$

esto es, que

$$\cdot\bar{a}\cdot\ \text{NbrPr}\ \bar{a}.$$

Los siguientes teoremas elementales referentes a esta función de comillas inscriptiva son fáciles de demostrar dentro de MSI^L_D. (Debe entenderse que una expresión ε afecta al contexto proposicional más corto mostrado en MSI^L_D que contenga esta expresión; en el caso de las fórmulas que contienen dos o más expresiones ε, la afección de la de la izquierda ha de ser la más larga.)

TF1. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{NbrPr}\ \mathbf{a}$.

(En virtud de *TE2* y de las leyes de existencia según las cuales $\vdash (\text{E}a)\text{Ay}\ a$, en donde Ay es la descripción estructural de **a**.)

TF2. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{NbrPr}\ \mathbf{a}_1\ .\equiv.\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ \text{NbrPr}\ \mathbf{a}$.

(Por *TE2*, *TE3* y las leyes de existencia.)

TF3. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{NbrPr}\ \mathbf{a}_1\ .\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ \text{NbrPr}\ \mathbf{a}_2 : \supset : \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{NbrPr}\ \mathbf{a}_2$.

TF4. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}\cdot$.

(Adviértase, sin embargo, que

$$\text{`}\cdot\mathbf{a}\cdot = \cdot\mathbf{a}\cdot\text{'}$$

no es válida.)

TF5. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ .\equiv.\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}\cdot$.

TF6. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ .\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}_2\cdot : \supset : \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}_2\cdot$.

TF7. $\vdash \cdot\mathbf{a}\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{a}_1\cdot\ .\supset.\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_1$.

(Es evidente que las fórmulas recíprocas de los teoremas estipulados por *TF7* no son válidas, a no ser que se admita que constantes individuales primitivas distintas denotan individuos distintos.)

TF8. $\vdash \sim(\text{E}x)\cdot\mathbf{x}\cdot\ \text{NbrPr}\ x$.

(Las variables no son nombres propios.)

'**P**', con o sin subíndices numéricos, representará cualquier constante predicativa monádica, de la parte traducente de MSI^L_D, de longitud $\leqq k_0$ (k_0 como en (XII, A)). Tenemos entonces los siguientes teoremas:

TF9. $\vdash \cdot\mathbf{P}\cdot\ \text{Ext}\ \mathbf{x}_3\mathbf{P}\mathbf{x}$.

TF10. $\vdash \cdot\mathbf{P}\cdot\ \text{Ext}\ \mathbf{x}_3\mathbf{P}_1\mathbf{x}\ .\equiv.\ \cdot\mathbf{P}_1\cdot\ \text{Ext}\ \mathbf{x}_3\mathbf{P}\mathbf{x}$.

TF11. $\vdash \cdot\mathbf{P}\cdot\ \text{Sem}\ \cdot\mathbf{P}\cdot$.

TF12. $\vdash \sim(\text{E}x)\cdot\mathbf{A}\cdot\ \text{Den}\ x$, si **A** es una fórmula de la parte traducente del metalenguaje.

(Las fórmulas no denotan.)

Obsérvese que todas estas funciones de entrecomillado implican expresiones que son traducciones de expresiones de *L*: luego estas funciones sólo se introducen en un metalenguaje traducente. Dentro de un metalenguaje intraducente no disponemos de ellas: carecemos simplemente, por así decirlo, de expresiones que circunscribir con comillas.

G. Semántica basada en inscripciones y figuras

Para algunos fines podría quererse emplear un metalenguaje semántico que tomase como valores para sus variables a la vez inscripciones y figuras. No daremos aquí detalles de semejante metalenguaje, sino sólo unas cuantas observaciones acerca de él.

El procedimiento más natural de construir un metalenguaje de este tipo sería, sin duda, considerar las figuras como clases de inscripciones semejantes y, por tanto, como valores para variables de clase del tipo inmediato superior al de las variables de inscripciones. Dentro de un lenguaje como éste, las variables de clase serían fundamentalmente necesarias. (Si se adoptase el criterio anterior, podría no quererse admitir la existencia de un número infinito de inscripciones.) Incluso este tipo de metalenguaje semántico, si fuese intraducente, podría formularse como lenguaje de primer orden en sentido estricto; pero si fuera traducente, podría ser de primer orden en sentido estricto si y sólo si su lenguaje objeto también lo fuese.

Los elementos primitivos de semejante metalenguaje incluirían probablemente algo parecido a una operación de encadenamiento. Sean 'Pi', etc., los elementos primitivos que designan las figuras apropiadas o las clases de inscripciones semejantes. ¿Deberá aplicarse el encadenamiento de un modo primitivo a las figuras o a las inscripciones? Parece más natural aplicarlo a las inscripciones, pues entonces se podría probablemente definir una operación de encadenamiento aplicada a figuras: por ejemplo, '(Pi⌢Pd)' es definible como 'la clase de todas las inscripciones *a* tales que existen inscripciones *b* y *c* tales que *b* es un Pi, *c* es un Pd y *a* es la cadena inscriptiva de *b* y *c*' (si no existen tales inscripciones, la cadena de las dos figuras es la clase nula de inscripciones).

Para los fines de una semántica de denotación del tipo estudiado en este libro, no es necesario un metalenguaje que contenga a la vez inscripciones y figuras. Pero este metalenguaje sería útil, sin duda alguna, para fines más generales, por ejemplo, para estudiar las relaciones mutuas de inscripciones y figuras y los diferentes modos que tienen de actuar en el discurso; también lo sería, probablemente, para dar una completa descripción semiótica de un sistema lingüístico de gran alcance expresivo y que contuviese elementos exactamente correspondientes a las particularidades egocéntricas (palabras como 'yo', 'ahora', 'aquí', 'este', etc.).

CAPÍTULO XIII

Constructivismo de primer orden

La máxima metodológica general, enunciada en (II, H), según la cual los lenguajes de primer orden numerables son preferibles a otros tipos de sistemas, ha sido seguida explícitamente en la formulación de los diversos metalenguajes semánticos anteriores. No hemos indicado las razones que nos movían a aceptar esta máxima; podría por ello pensarse que la preferencia por estos lenguajes es algo arbitraria y que sus motivos son vagos o carecen de fundamento sólido en algún otro sentido. Pero, por el contrario, varias importantes razones abogan por los sistemas estrictos de primer orden. Algunas de éstas presentan un carácter lógico-matemático, otras son algo más filosóficas, otras se basan hasta cierto punto en cuestiones de preferencia más personales. Plantearemos estas diversas razones con algún detalle en el presente capítulo; muchas de ellas serán necesariamente toscas y necesitarán una formulación más cuidadosa; pero quizá ayuden a aclarar la amplia posición filosófica que se esconde bajo la máxima metodológica general, y, por tanto, bajo los diversos metalenguajes semánticos formulados en este libro.

Hemos llamado a la posición que vamos a plantear *constructivismo de primer orden.*

En el § A se indica el contenido de la máxima metodológica general con más detalle que hasta ahora. En el § B se dan *argumentos en pro de* esta máxima. En el § C y el § D se compara y contrasta el punto de vista general del constructivismo de primer orden con las posiciones *realista* y *nominalista.* En el § E se dan razones *en pro de la semántica intraducente.* Se muestra en el § F que las diversas formulaciones de la semántica intraducente son *mínimas* en un sentido apropiado de esta palabra. Se hace una posible objeción a la semántica intraducente en el § G y se defiende esta última. En el § H se bosquejan dos teorías generales de los sistemas semánticos en las cuales éstos aparecen como *valores para variables* o como *pares ordenados virtuales de relaciones virtuales.* Por último, en el § I se da otro argumento en pro de la máxima metodológica general a propósito de la «situación» en los fundamentos de la matemática conocida con el nombre de *paradoja de Skolem.*

A. El contenido de la máxima

El principio metodológico general de preferir siempre que sea posible los lenguajes de primer orden en sentido estricto se refiere a *todos* los sistemas lingüísticos de primer orden, cualesquiera que sean, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes sintácticos o semánticos. En el caso de los lenguajes objeto, nos hemos permitido a través de los capítulos anteriores la mayor libertad de elección: no hemos hecho otra restricción acerca de ellos que la de que fueran de primer orden, y los métodos semánticos desarrollados han sido aplicables, de un modo uniforme y con pocas excepciones, a todos los lenguajes objeto de primer orden. La máxima metodológica general no ha sido seguida, pues, en la elección de lenguajes objeto, porque no se conocen métodos para formular (la totalidad de) el análisis matemático (la teoría de los números reales)—y con ella aquellos campos de la matemática y la filosofía que lo presuponen—empleando sólo lenguajes de primer orden con un dominio fundamental numerable. Tampoco está claro que los lenguajes objeto de primer orden numerables basten para los fines que la ciencia se propone. Aunque esperemos hacer patente que estos lenguajes objeto bastarán en la mayoría de los casos, en modo alguno cabe establecer tal cosa fundándose en el nivel actual de los conocimientos: la mayor parte de lo que se sabe parece inclinarse hacia el otro lado; pues muchos conceptos que descansan fundamentalmente en lo no numerable atraviesan constantemente la ciencia y la matemática, y los métodos conocidos más importantes de definir estos conceptos se sitúan en sistemas formales de orden superior o de primer orden, pero en sentido ampliado. Por carecer, pues, de métodos de formular varios campos de la ciencia y la matemática dentro de sistemas de primer orden numerables, hemos de emplear lenguajes objeto de mayor alcance.

Ya hemos observado en el capítulo III cómo, usando los trabajos de Tarski, Chwistek y Quine, puede formularse una *sintaxis* de primer orden numerable, de modo que el uso de la máxima general no conduce a nada nuevo en sintaxis.

En el caso de los metalenguajes *semánticos*, la situación ha sido radicalmente distinta. Todos los metalenguajes semánticos (de lenguajes objeto de alcance suficiente) formulados hasta ahora, si aún son de primer orden, lo son sólo en sentido amplio; podría pensarse por ello que la aplicación de la máxima metodológica general limitaría demasiado. Hemos mostrado, sin embargo, que no es así: el metalenguaje semántico traducente MS_D^L es de primer orden en sentido estricto siempre que lo sea L; si L es de primer orden sólo en sentido amplio, como en el caso de los sistemas basados en la teoría de tipos o en la de conjuntos, entonces, por supuesto, MS_D^L es un lenguaje de primer orden en sentido amplio, aun cuando en su formulación sólo se utilizan conceptos sintácticos y semánticos restringidos. Tenemos en MS_O^L, como hemos visto, un metalenguaje semántico numerable de primer orden independiente de L: la aplicación de la máxima general nos ha conducido así a lograr una formulación muy simple de la semántica

traducente, y también a una semántica completamente nueva de tipo intraducente.

Al haber conseguido una semántica de primer orden, intraducente, numerable y completamente general, podríamos pensar que ya no es necesario buscar lenguajes *objeto* de primer orden numerables de alcance cada vez mayor. Es posible dar una descripción sintáctica y semántica completa de cualquier lenguaje objeto de primer orden, cualquiera que sea su complejidad, dentro de una semántica intraducente; al nivel metalingüístico, nuestro ideal se ha realizado enteramente: podemos manejar la sintaxis de un lenguaje L, determinar si una expresión dada es o no una fórmula o una proposición y mostrar qué fórmulas o proposiciones se siguen de ella por medio de las reglas de deducción. Más aún: sabemos lo que significa decir que las proposiciones de L son verdaderas, y logramos de este modo una interpretación explícita del lenguaje (para ello se hace uso de las Hipótesis específicas de la comprensión).

No obstante, la máxima metodológica general pretende ser aplicable a todos los sistemas lingüísticos sin distinción alguna, incluyendo en ellos a los lenguajes objeto; y los argumentos que hayan de darse en su defensa serán también argumentos en defensa de los lenguajes objeto numerables de primer orden. Cuando hemos formulado un lenguaje objeto de este tipo, adecuado a un campo dado de la teoría científica, filosófica o matemática, los metalenguajes semánticos de dicho lenguaje son más sencillos que los de sistemas más complicados. Esto es evidente en el caso de los metalenguajes traducentes porque contienen sus lenguajes objeto, pero también puede aplicarse, en cierto modo, a los metalenguajes intraducentes (véase, más adelante, el § G).

B. Coherencia y economía

Ya hemos indicado antes con cierto detenimiento la importancia del concepto de coherencia (V, E). Es obvio que los sistemas lingüísticos cuya coherencia pueda demostrarse de un modo convincente son preferibles a aquellos que se sepan contradictorios. Rara vez tiene interés un sistema lingüístico manifiestamente contradictorio, a no ser que pueda remediarse su incoherencia; más frecuente es encontrar sistemas lingüísticos, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes, de los cuales no se sabe si son coherentes o incoherentes; o que, si se sabe que son coherentes, es sólo por medio de un argumento o demostración tan complicado o que emplea métodos lógico-matemáticos tan potentes que apenas entraña convicción.

Una razón importante para preferir los sistemas lingüísticos de primer orden numerable a los lenguajes de otras formas, es que puede demostrarse la coherencia de muchos de estos sistemas usando sólo métodos convincentes: la mayor parte de los lenguajes para los cuales existen estas demostraciones de coherencia son, en realidad, de esta clase. Teniendo ante nosotros metalenguajes semánticos de primer orden,

para los cuales disponemos de demostraciones de coherencia muy sencillas, tenemos asegurados unos sólidos fundamentos para la semántica. Hasta ahora los metalenguajes semánticos han sido generalmente de orden superior o de primer orden en sentido amplio; las demostraciones de coherencia o de coherencia relativa de que disponemos para estos lenguajes son, por regla general, de tipo más complicado.

La preferencia de los sistemas lingüísticos de primer orden a los de grado superior tiene también una razón de economía. En vez de una multiplicidad de géneros diferentes de variables de distintos tipos lógicos, en los sistemas de primer orden tenemos sólo variables de un tipo único; en vez de predicados primitivos que se apliquen de un modo ambiguo a entes de diferentes tipos lógicos, sólo necesitamos predicados primitivos que se aplican exclusivamente a individuos. También hay economía en la estructura axiomática: en lugar de los axiomas lógicos y de reglas que abarquen géneros diferentes de variables y de cuantificadores, sólo necesitamos las reglas simples de la lógica de primer orden.

Pero también hay una economía ontológica, esto es, en el número de objetos. Dado un lenguaje L de primer orden numerable, la cantidad de objetos que pueden ser valores para variables dentro de L es, por supuesto, numerable. Dado un L de segundo orden con axiomas y reglas suficientes para mostrar que existe al menos una cantidad numerable de individuos en L, puede mostrarse que la cantidad de clases que son valores para variables es innumerable. Dentro de los campos fundamentales de estos lenguajes existen, pues, muchos más objetos que en los de los lenguajes L estrictos de primer orden [1].

C. Constructivismo semántico, nominalismo, realismo y finitismo

Hemos llamado *constructivismo de primer orden* al criterio filosófico que subyace a la máxima metodológica general; el uso de ésta, en cuanto aplicada exclusivamente a metalenguajes semánticos, podría llamarse *constructivismo semántico*. En este apartado comentaremos el constructivismo semántico y de primer orden, y también compararemos este punto de vista con los ya conocidos del nominalismo y del realismo.

La palabra 'constructivismo' se usa por matemáticos y lógicos en varios sentidos diferentes. Un uso particularmente influyente de esta palabra está en relación con las ideas intuicionistas de Brouwer acerca de los fundamentos de la matemática; pero el punto de vista aquí adoptado es el clásico en tanto que opuesto al intuicionista, pues se presuponen *in toto* las leyes de la teoría clásica bivalente de funciones veritativas y de cuantificadores. Por otra parte, aquella palabra se

[1] El sentido que aquí damos a 'economía' es algo vago. La economía y la sencillez están, sin duda, relacionadas entre sí hasta cierto punto: Goodman y otros han hecho un trabajo importante al aclarar el concepto de sencillez. Véase N. Goodman, *The Estructure of Appearance*, pp. 59-75, y también J. Kemeny, «The Use of Simplicity in Induction», *Philosophical Review*, 62 (1953), pp. 391-408.

emplea también en otros sentidos, pero no parece existir un sentido *único* universalmente aceptado, de forma que su empleo aquí en un contexto filosófico no hace violencia a su sentido matemático consagrado; además, cuando hablamos de «constructivismo de primer orden», indicamos suficientemente lo que queremos dar a entender. También podríamos llamar a nuestro criterio más sencillamente 'primer-ordenismo' o 'numerabilismo de primer orden', pero estas expresiones son apenas aceptables; además, la idea es auténticamente constructivista en el sentido de que los conceptos semánticos básicos, siendo fácilmente definibles en sistemas formales de complejidad suficiente, se explican o caracterizan aquí usando sólo instrumentos lógicos, sintácticos y semánticos restringidos. El problema del constructivismo en el sentido matemático es el intento de conseguir por medio de métodos cuidadosamente restringidos lo que de otro modo podría definirse u obtenerse fácilmente usando métodos de mayor alcance; las diferentes restricciones que se aplican a los métodos permitidos engendran diferentes clases de constructivismos. El constructivismo de primer orden, en términos generales, permite todos aquellos instrumentos, métodos o conceptos que sean formalizables dentro de un sistema de primer orden numerable.

El constructivismo de primer orden está estrechamente relacionado con la posición filosófica llamada a veces *construccionismo lógico*: esta posición ha sido adoptada en particular recientemente por Frege, Russell, Whitehead, Carnap, Goodman y otros. Hemos dado algunos argumentos en su defensa en el capítulo I. Aquí nos contentaremos con observar que el constructivismo de primer orden podría llamarse con igual justicia *construccionismo de primer orden*.

Veamos ahora los principios fundamentales del nominalismo y del realismo, que compararemos y contrastaremos con el constructivismo semántico.

En primer lugar consideraremos el criterio nominalista [1]. Las propiedades principales que debe reunir un sistema lingüístico para ser nominalista son tres: (1) el sistema lingüístico ha de ser un sistema de primer orden simple, aplicado, con o sin inclusión de la identidad; (2) sus reglas y axiomas han de ser tales que no se admita de un modo explícito una infinidad de objetos en su campo fundamental; (3) los entes de su campo fundamental deben ser de un modo u otro individuos «concretos» y las constantes predicado primitivas se aplicarán exclusivamente a estos individuos. En rigor, estas tres condiciones son independientes entre sí, en el sentido de que puede adoptarse cualquiera de ellas sin adoptar las demás.

En lo que se refiere a (2), los nominalistas no han de considerarse ni finitistas ni infinitistas: ignoramos si el número de individuos concretos del universo es finito o infinito, luego ambas hipótesis podrían ser falsas; en consecuencia, los nominalistas prefieren un estricto agnosticismo acerca de lo finito y lo infinito. Respecto a (3), los nominalistas

[1] Véanse, sobre todo, GOODMAN y QUINE, *op. cit.*, y GOODMAN, *The Structure of Appearance*, en especial pp. 33-41. (Sus criterios pueden haber variado algo desde la fecha de estas publicaciones.)

no aceptan las entidades «abstractas» (como clases, propiedades o relaciones) como valores para variables: no creen en estas entidades y no consideran satisfactorio ningún sistema que las admita como tales valores; los individuos concretos que aceptan pueden ser objetos físicos, sucesos dentro del mundo espacio-temporal o unidades de experiencia, quizá datos sensoriales, o qualia en un sentido u otro. En términos generales, los *fisicistas* consideran que los objetos espacio-temporales son el tipo fundamental de ente; los *fenomenistas*, que lo son las unidades de experiencia o las cualidades en determinado sentido. Las constantes predicativas primitivas que se admiten son tales que se aplican exclusivamente a los individuos considerados; por supuesto, con una finalidad concreta pueden quererse admitir únicamente aquellas constantes predicativas primitivas que satisfagan ciertas restricciones ulteriores; pero estas otras restricciones no estarían determinadas por consideraciones puramente nominalistas.

A base de estas tres condiciones pueden distinguirse varios niveles de nominalismo. El punto de vista más estricto, el de Goodman y Quine (en 1947), requiere a la vez (1), (2) y (3); otros tipos de nominalismo menos rigurosos resultan de exigir sólo (1) y (2), o (1) y (3) ((1) es probablemente esencial para todo sistema que pueda llamarse aun remotamente 'nominalista'). Una teoría de conjuntos finita (que no incluyera un axioma de infinitud) proporcionaría un ejemplo de nominalismo basado en (1) y (2). (Puede citarse como nominalismo basado en (1) y (3) el sistema de lógica homogénea [1] del autor, en una de sus interpretaciones.)

De las tres características, el constructivismo de primer orden sólo exige la (1), de forma que puede identificarse con un nominalismo en el sentido más amplio; pero todo sistema nominalista basado en (1), (2) y (3), en (1) y (2) o en (1) y (3) es *eo ipso* aceptable para un constructivista de primer orden. Así, lo son prácticamente todos los sistemas nominalistas, pero, en cambio, muchos tipos importantes de sistemas, esenciales para formalizar varios campos de la matemática y la ciencia, deben ser rechazados por un nominalista absoluto; esto es legítimo siempre que estos sistemas o teorías puedan formularse de nuevo de acuerdo con sus exigencias; pero si no se dispone de los métodos necesarios, puede parecer que el criterio nominalista extremado corre peligro de limitar demasiado.

El realismo, también llamado a veces *platonismo*, es el punto de vista según el cual, además de los individuos concretos del tiempo y del espacio o de la experiencia, existen entidades abstractas como clases, relaciones, números, funciones, etc., que pueden tomarse de un modo significativo como valores para variables. Tales entidades abstractas o universales constituyen, según este criterio, una parte esencial del «contenido del mundo», y rechazarlas supone una mutilación de la ciencia, la matemática y el lenguaje. Esta posición es, sin duda, la de la mayoría de los científicos y los matemáticos y de un modo u otro es una de las más universalmente adoptadas en la filosofía contemporánea.

[1] *The Journal of Symbolic Logic*, 8 (1943), pp. 1-23; 14 (1949), pp. 27-31 y 15 (1950), pp. 131-4.

Tanto los principios nominalistas como los realistas suelen pretender ser aplicables a todos los sistemas lingüísticos, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes sintácticos o semánticos. Como ejemplos de metalenguajes semánticos construidos de acuerdo con estos principios, basta con mencionar algunos de los metalenguajes formulados en los capítulos anteriores. Hemos formulado dos metalenguajes que son nominalistas en el sentido estricto de (1), (2) y (3). MSI^L_D (capítulo XI) es nominalista en este sentido siempre que el lenguaje objeto L lo sea también, mientras que MSI^L_O (capítulo XII) es nominalista en sentido estricto independientemente de que su lenguaje objeto lo sea o no a su vez. Creemos que MSI^L_O da una solución completa al problema de lograr una semántica nominalista en el sentido de Goodman y Quine (en 1947).

Como ejemplos de metalenguajes semánticos realistas podemos citar MS^S_D (VI, B), MS^S_O (IX, E), los diversos metalenguajes basados en la satisfacción, la designación y la determinación en tanto que aplicados a un L realista (VII, A-D) y también el propio MS^L_D para un L realista (IV y V). También son realistas los diversos metalenguajes estudiados por Tarski y Carnap (véase (VII, E)).

En el próximo parágrafo trataremos de las diferencias entre constructivismo de primer orden y realismo. Como sucede entre el nominalismo y el constructivismo de primer orden, las diferencias se centran en las condiciones (2) acerca del finitismo y (3) acerca de los objetos concretos. Con respecto a (2), parece que, entre un lenguaje L con un dominio finito y un L' con un dominio numerable, la elección del primero engendra mayor economía y simplicidad; adoptaremos, por tanto, como segunda máxima metodológica que *es conveniente tener campos de individuos finitos, siempre que sea posible.* Pero la dificultad es que, en algunos terrenos de la ciencia, la matemática o la filosofía, semejante reducción a lo finito parece imposible; por ejemplo, parecería imposible construir un sistema finitista adecuado para la teoría matemática de los número reales, incluso para sus partes más elementales, como hemos apuntado más arriba. (Un sencillo método de construir la teoría de los números reales es considerar éstos como clases infinitas de números racionales que tienen determinadas propiedades; esta condición de que las clases o clases virtuales de números racionales sean infinitas parece esencial.) Sin embargo, debe esperarse de la dirección finitista mucho más de lo que hasta ahora se ha creído posible, pues el uso que en adelante se haga de esta segunda máxima metodológica general podría conducir a importantes resultados.

El sentido que aquí damos a 'finitismo' difiere notablemente del que suelen darle los matemáticos: cuando éstos hablan de un lenguaje finitista suelen entender que es numerable; aquí, sin embargo, entendemos que un lenguaje finito o finitista es aquel cuyo campo fundamental se toma como compuesto de un número de objetos no mayor que finito (por supuesto, no hace falta especificar explícitamente este número finito; es de presumir que, para los nominalistas estrictos, sea el número de entidades concretas en el espacio y el tiempo). De momento

hablaremos, frente a la posición finitista, de *numerabilismo* en el sentido en que los matemáticos suelen hablar de finitismo.

Skolem ha dado a conocer recientemente algunas reflexiones en defensa del numerabilismo como uno de los aspectos de una filosofía de las matemáticas [1]; dado que el numerabilismo podría parecer vigente o no dentro del terreno de los lenguajes matemáticos, las observaciones de Skolem son especialmente oportunas. Había confiado, dice, en que las «características» sumamente «naturales» del criterio numerabilista «convencería a la mayoría de que la formulación numerabilista de las matemáticas no sólo constituía una posibilidad, sino que era *la* correcta o verdadera —al menos para la aritmética. Ahora veo claramente», prosigue, «que la falta de interés por [el numerabilismo] ...se debe a la circunstancia de que la mayoría de los lógicos y los matemáticos no creen que vaya a ser suficiente para las matemáticas. Naturalmente que esto es verdad, si por matemáticas entendemos todas las matemáticas de hoy en día, tal como las encontramos en los libros de texto y en las revistas científicas. Es trivial decir que las matemáticas actuales, construidas en parte gracias a ideas transfinitas, no pueden basarse sin alteración en un razonamiento finitista numerabilista; la cuestión es, sin embargo, qué perderemos o ganaremos con esta alteración. En lo que respecta a la claridad y a la seguridad sólo podemos ciertamente ganar mucho... No se me entienda mal: no soy un fanático y no es mi intención condenar las ideas y los métodos no finitistas; pero me gustaría subrayar que el desarrollo finitista de las matemáticas, hasta donde pueda llegar, tiene una ventaja muy grande en claridad y seguridad. Además ...quizá existan buenas razones para conjeturar que puede llegar muy lejos si se hacen serios intentos en esta dirección. Quisiera decir también que cuanta más importancia demos al desarrollo puramente finitista [numerabilista] de las matemáticas, tanto menos nos habrán de preocupar las difíciles demostraciones de coherencia de los sistemas lógicos... que contienen cuantificadores. Hay que admirar el gran ingenio que demuestra la creación de estas demostraciones de coherencia, en particular la dada por Gentzen y Ackermann de la coherencia de la teoría de números formalizada. Pero ya otras veces ha sucedido que obras sumamente ingeniosas han perdido su interés por haberse hallado modos de pensar más sencillos» [2].

Las observaciones de Skolem proporcionan la base de un argumento en defensa de la posición numerabilista frente a la tendencia estrictamente finitista de un nominalismo absoluto.

Ocupémonos ahora del tercer principio del nominalismo que se refiere a los objetos concretos. Ya hemos observado que los tres principios del nominalismo son independientes entre sí; pero para Goodman y Quine el segundo principio (acerca del finitismo) va íntimamente

---

[1] Th. SKOLEM, «Some Remarks on the Foundations of Set Theory», *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, New Series (American Mathematical Society, Providence, 1952), pp. 695-704.

[2] T . Skolem, *loc. cit.*, pp. 703-4.

ligado a su opinión acerca de los objetos concretos, es más, parece estar determinado por ésta. Parece así que su posición queda descrita totalmente por (1) y (3).

Dar un análisis exacto del significado del tercer principio nominalista nos llevaría demasiado lejos de la semántica y la sintaxis. Construir un sistema lingüístico en el cual pudiera enunciarse (3) sería ya de por sí una empresa de cierta dificultad; por otra parte, (1) y (2) tienen un significado más o menos evidente y pueden sin duda enunciarse fácilmente dentro de conocidos lenguajes formalizados; de aquí que (3) carezca de cierta claridad que poseen (1) y (2). Además, puede pensarse que (3) es de naturaleza metafísica o epistemológica más que sintáctica o semántica: en efecto, enuncia algo acerca de la naturaleza del universo o del conocimiento y no acerca de propiedades sintácticas o semánticas de un lenguaje; el principio (3), tomado en sentido fisicista, parece proceder de una metafísica previa de las partículas espacio-temporales; tomado en sentido fenomenista, (3) parece tener su origen en una epistemología previa [1]. Pero puede ponerse en duda que la sintaxis y la semántica hayan de descansar sobre semejante base filosófica.

La actitud que tomamos aquí implica que la sintaxis y la semántica deben ser independientes de toda posición particular metafísica o epistemológica. Las cuestiones semánticas pertenecen al tipo de cuestiones que deben considerarse y resolverse con éxito antes de tomar bifurcaciones conducentes a construcciones filosóficas concretas. Sobre todo, no es cosa de la semántica preferir un tipo u otro de entes y establecer probiciones en consecuencia: dadas unas entidades de tal y cual tipo y dadas las expresiones de un lenguaje formalizado, la tarea de la semántica es estudiar sus relaciones mutuas. Otro argumento en favor del constructivismo de primer orden frente a un nominalismo extremado es, pues, su rechazo de (3) y de todos los supuestos filosóficos análogos. Pero esta actitud no debe entenderse como antifilosófica: los sistemas lingüísticos metafísicos y los que expresan otros campos de la filosofía se han tratado aquí en un plano de igualdad con los otros, y los métodos semánticos generales desarrollados son aplicables por igual a todos estos sistemas lingüísticos.

Debe advertirse que todos los sistemas nominalistas absolutos son aceptables desde el punto de vista constructivista de primer orden (pero no a la inversa) y que algunos sistemas realistas también lo son (por ejemplo, toda teoría de conjuntos numerable de primer orden) y es de presumir que todos los sistemas realistas sean constructivistas de primer orden, como lo son los sistemas nominalistas. El constructivismo de primer orden ocupa, pues, una posición intermedia entre los otros dos puntos de vista: tiene las ventajas de un nominalismo estricto, pero no rechaza los sistemas lingüísticos científicos no nominalistas de importancia manifiesta.

---

[1] El sistema constructivista de GOODMAN en *The Structure of Appearance* está formulado, en parte, para proporcionar a (3) un fundamento epistemológico.

D. Clases

Ya hemos observado que, de acuerdo con el tercer principio del nominalismo referente a los objetos concretos, las clases se rechazan de plano: para los nominalistas absolutos no existen tales cosas. Los realistas, por otra parte, no sólo admiten estos objetos, sino que los encuentran esenciales para la ciencia y la matemática: es inconcebible, dicen los realistas, un sistema lingüístico de alcance suficiente para expresar los teoremas principales de la matemática moderna sin variables u otros términos que abarquen o designen clases o conjuntos u otros objetos abstractos; el de *conjunto* es uno de los conceptos capitales de la matemática moderna; privar a la matemática de este concepto sería como privar a la aritmética de los números; los nominalistas no han conseguido establecer un sustitutivo auténtico y utilizable de este concepto, por lo cual el *onus probandi* sigue recayendo sobre ellas. No cabe duda de que los realistas tienen aquí un argumento convincente contra las formas extremas de nominalismo, pero que no puede ser un argumento contra el constructivismo de primer orden, dada la posibilidad de un fundamento numerabilista de las matemáticas.

Ninguno de los argumentos dados anteriormente (en los §§ A-C) lo es en contra de la admisión de clases: el que se refiere a la coherencia es independiente del problema de la existencia de clases, y los referentes a la economía tratan del número de elementos primitivos y de objetos, pero no de su carácter abstracto o concreto. Es posible que puedan darse argumentos nacidos de la exigencia de sencillez en contra de la admisión de clases, pues quizá pueda mostrarse que el concepto de individuo concreto en un sentido apropiado es más sencillo que el de clase (con relación a un conjunto de axiomas dado); pero los nominalistas no lo han hecho hasta la fecha, y está muy lejos de ser claro que pueda hacerse. Ninguno de los argumentos en favor de los sistemas de primer orden numerables da lugar a un argumento metodológico en contra de la admisión de clases; los que dan los realistas acerca de las clases tienden más bien a favorecer el constructivismo de primer orden, frente a un nominalismo estricto, como filosofía general del lenguaje.

E. En favor de la semántica intraducente

Hemos dado varios argumentos en favor del constructivismo de primer orden. Hemos formulado detalladamente el metalenguaje MS_o^{ω} (capítulos VIII-IX) como ejemplo de metalenguaje semántico constructivista de primer orden que tiene esencialmente todo el alcance necesario para el análisis semántico de cualquier lenguaje objeto de primer orden, L; análogamente, MSI_o^{ω} se ha formulado como ejemplo de metalenguaje semántico nominalista de alcance determinado. Ambos metalenguajes son intraducentes. Consideremos ahora algunos argumentos en favor de la semántica intraducente oponiéndola a la traducente.

Para la comparación tomaremos MS_D^L como formulación típica de la semántica traducente. En cuanto a los sistemas intraducentes, hablaremos primero exclusivamente de MS_O^L y más tarde nos ocuparemos de MSI_O^L, que podemos considerar como una versión finitista de MS_O^L.

Existe en la semántica intraducente una considerable economía en el número de elementos primitivos con relación a las teorías traducentes: en MS_O^L no necesitamos traducciones de los símbolos primitivos del lenguaje objeto, mientras que en MS_D^L éstos desempeñan un papel fundamental. También hay en MS_O^L mayor economía ontológica que en MS_D^L: en MS_O^L, por así decirlo, no tenemos ontología alguna del lenguaje objeto, por no haber traducciones de las variables de L. Para fines semánticos particulares, se hace uso de las Hipótesis específicas de la comprensión de L, las cuales, junto con la teoría general de la comprensión, compensan la rigurosa economía de elementos primitivos, como hemos visto.

Otra ventaja de la semántica intraducente es la relacionada con cierta curiosa circularidad existente en la estructura de la semántica traducente. Para tratar de este punto volvemos por un momento a los metalenguajes semánticos de los capítulos IV-VII.

Recordaremos de nuevo que todos los metalenguajes semánticos tratados tienen la característica común de que el lenguaje objeto reaparece *in toto* dentro del metalenguaje: cada símbolo de L está traducido de un modo único dentro del metalenguaje; cada expresión de L reaparece como expresión del metalenguaje, cada axioma o regla como axioma o regla del metalenguaje. En las demostraciones de la coherencia de L anteriormente dadas en (V, E), por ejemplo, advertimos que los instrumentos semánticos utilizados comprenden todos los instrumentos deductivos del lenguaje objeto, además de muchos otros; presuponemos en el metalenguaje semántico todos los medios de expresión, todos los axiomas y todas las reglas de deducción del propio lenguaje cuya coherencia intentamos demostrar; de no tenerse algún motivo previo para pensar que el lenguaje objeto es coherente, semejante demostración podría no ser especialmente convincente, pues si L contuviese alguna contradicción escondida de la que no nos hubiéramos percatado, el metalenguaje semántico la contendría también. Las demostraciones de coherencia en la semántica traducente parecen circulares en el sentido de que nos permitimos emplear traducciones de los procedimientos deductivos del mismo lenguaje cuya coherencia buscamos demostrar; esta peculiaridad, naturalmente, no constituye un círculo vicioso y pese a ella tales demostraciones de coherencia tienen interés. Pero, con todo, esta circularidad resulta incómoda: nos conduce a pensar que quizá las demostraciones de coherencia semánticas traten de realizar más de lo que efectivamente consiguen; los detalles de tales demostraciones podrían interesarnos desde el punto de vista matemático, pero no nos convencen seriamente de la coherencia. En resumen, estas demostraciones podrían parecer interesantes para la lógica o la matemática, pero no interesan a la *metalógica* o a la *metamatemática:* en estas últimas disciplinas deseamos llegar a un convencimiento usando sólo muy escasos procedimientos deductivos.

Esta curiosa circularidad parece ser una desventaja del empleo de metalenguajes semánticos para las demostraciones de coherencia. Uno de los más importantes motivos de la construcción de un metalenguaje semántico para L es, como ya hemos señalado, el proveer a L de una demostración de coherencia. Si ahora nos encontramos con que la pretendida demostración de coherencia no es convincente, podría parecer que la semántica sistemática ha perdido parte de su importancia.

Debemos preguntarnos ahora en qué sentido —si es que hay alguno— cabe decir que la semántica intraducente evita esta curiosa circularidad. En primer lugar, recordemos que en MS_O^L no se hace referencia a los objetos de L por medio de variables que los abarquen: dentro de MS_O^L se habla exclusivamente de las *expresiones* de L y se establecen relaciones entre ellas de maneras determinadas; además, al demostrar la coherencia de L dentro de MS_O^L, se hace uso como hipótesis de las Hipótesis específicas de la comprensión de L siempre que son necesarias; de este modo no nos comprometemos acerca de si se verifican o no tales Hipótesis específicas: si se verifican, entonces mostramos que L es coherente. Sabemos, por la demostración de coherencia relativa de las Reglas generales de la comprensión, que todos los instrumentos admitidos en la demostración de la coherencia semántica de L (que no sean las Hipótesis específicas de la comprensión) son seguros con relación a la sintaxis; de este modo, toda duda que pueda surgir acerca de la demostración de coherencia de L debe referirse a la sintaxis o a las Hipótesis específicas de la comprensión. De este doble modo, no tomando las entidades de L como valores para variables y adoptando las Hipótesis específicas de la comprensión como hipótesis adicionales siempre que son necesarias, se evita dentro de MS_O^L aquella curiosa circularidad de la semántica traducente.

Naturalmente, no debe suponerse que esta circularidad se evite por dejar de ser necesarias las Hipótesis específicas de la comprensión; ni tampoco sería conveniente prescindir de estas hipótesis, porque están determinadas por el carácter axiomático del lenguaje objeto: la semántica de L es, ante todo, la semántica de los axiomas de L, y sólo por medio de dichas Hipótesis específicas logramos una descripción o caracterización semántica de los axiomas. Ahora bien, el uso de las Hipótesis específicas es esencial para demostrar la coherencia de L; permanece así en la semántica intraducente una especie de residuo de la curiosa circularidad de las demostraciones de coherencia en la semántica traducente. Algo de esta circularidad parece esencial a todos los métodos semánticos conocidos de demostrar la coherencia.

Debe indicarse otra ventaja particularmente importante que posee MS_O^L sobre MS_D^L en relación con la primera máxima metodológica. MS_O^L es un lenguaje de primer orden numerable independientemente de que lo sea o no el lenguaje objeto L al cual se aplica, mientras que la numerabilidad de MS_D^L se basa en la de L. Luego MS_O^L posee, frente a MS_D^L, todas las ventajas de los sistemas numerables de primer orden para un L de primer orden en sentido amplio.

Hemos mostrado que MS_D^L era coherente con relación a los axiomas de M junto con los axiomas de L; pero hemos visto que MS_O^L lo era

sólo con relación a los axiomas de L. La coherencia de MS^L_O ofrece pues, en este sentido, más seguridad que la de MS^L_D: esto constituye otra ventaja del primer metalenguaje; otra más es que MS^L_O no utiliza la Regla de inducción infinita, *RSin4*. Las demostraciones son, en MS^L_O del tipo finito habitual, mientras que en MS^L_D pueden contener una infinidad de premisas.

Los metalenguajes inscriptivos MSI^L_D y MSI^L_O pueden tomarse como versiones finitistas respectivamente de MS^L_D y MS^L_O; MSI^L_O tiene sobre MSI^L_D las mismas ventajas que MS^L_O sobre MS^L_D: ya hemos hablado de ellas más arriba. Veamos ahora qué ventajas puede tener MSI^L_O sobre MS^L_O o, en otro terreno, MSI^L_D sobre MS^L_D.

MSI^L_O es claramente nominalista: es de primer orden, puede ser finitista y toma como valores para variables exclusivamente objetos concretos; está construido de acuerdo con la segunda máxima metodológica (y también con la primera); no tiene las dificultades arriba señaladas según la tesis general del finitismo. Tenemos en MSI^L_O un metalenguaje semántico satisfactorio de tipo sumamente restringido: no hace falta, al menos para los fines que nos proponemos, un metalenguaje semántico de mayor complejidad o alcance expresivo. MSI^L_O es probablemente el metalenguaje semántico más restringido y más simple que se haya formulado hasta ahora: es de tal índole que no depende en modo alguno de L, para el cual podemos tomar cualquier lenguaje de primer orden sin reparar en su complejidad.

MSI^L_D depende fundamentalmente, en cambio, de L, y es un sistema nominalista si y sólo si L lo es también: MSI^L_D puede ser finitista si y sólo si lo es L. Pero MS^L_D no puede interpretarse como finitista en ninguna circunstancia. MSI^L_D tiene, pues, sobre MS^L_D la ventaja de estar formulado de acuerdo con ambas máximas metodológicas, para un L finito.

F. Semántica mínima

Mostremos ahora que la semántica intraducente proporciona una semántica *mínima* en un sentido apropiado.

En primer lugar, debemos aclarar lo que ha de entenderse por semántica mínima y justificar la definición que proponemos sobre bases intuitivas. Hablando en términos muy generales, una semántica mínima es aquélla que presupone lo menos posible en la elección de elementos primitivos y de objetos tomados como valores para variables; también debe admitirse lo menos posible en lo que respecta a axiomas y reglas. De aquí que, para que una semántica sea mínima, hemos de procurar, sin duda, que sea intraducente en vez de traducente; y una semántica debe contener un concepto de verdad y, por supuesto, todos los conceptos definibles a base de éste. Pero estos conceptos agotan en realidad la semántica, en el sentido extensional que damos en este libro a dicha palabra. Por tanto, quizá tengamos razón al definir un metalenguaje semántico mínimo como aquél que tiene dichas dos propiedades: esto es, aquél que (i) es intraducente y (ii) contiene un

predicado de verdad junto con todos y únicamente aquellos conceptos semánticos que pueden definirse de un modo apropiado a partir de éste.

Veremos a continuación que esta definición es intuitivamente adecuada. Hemos señalado en los apartados anteriores las ventajas de la semántica intraducente con relación al número y a los géneros de elementos primitivos y con relación al número y a los géneros de objetos que se presuponen como valores para variables. (Sólo muy poco más puede reducirse en esta dirección, si es que puede reducirse algo, cuando la semántica es finitista.) Todavía no hemos definido con precisión un concepto de lo que se entiende cuando hablamos de «admitir lo menos posible» por medio de axiomas o reglas: es necesario caracterizar exactamente este concepto; pero, de cualquier modo que se defina, es quizá menos importante admitir pocos supuestos por medio de axiomas y reglas que asegurarse de que lo admitido es coherente, al menos de un modo relativo. Si ahora, como en el caso de los axiomas semánticos de la semántica intraducente, pudiéramos mostrar que los axiomas son coherentes con relación a la teoría precedente (interpretando de un modo muy sencillo el elemento primitivo 'Cmpr' dentro de esta teoría, de forma que todas las reglas referentes a él se volvieran demostrables), podría decirse en cierto modo que no estamos suponiendo nada nuevo: porque, en este caso, los nuevos axiomas tienen ya una interpretación o un modelo dentro de la teoría precedente. De aquí que sea difícil ver qué es lo menos que pueda admitirse por medio de axiomas específicamente semánticos; por ello, es razonable exigir (i) en la definición de semántica mínima; pero también es razonable exigir (ii), pues 'Vrd' y los conceptos definibles a partir de éste agotan la semántica en el sentido que aquí le damos.

Hemos visto en (VIII, E) que 'Cmpr' —y con él todos los demás conceptos de la semántica intraducente— es definible a base de 'Vrd'; por lo tanto, nada es definible en MS^L_0 o en cualquiera de sus equivalentes que no lo sea en un metalenguaje intraducente para L que tenga 'Vrd' como elemento primitivo. Luego en la semántica intraducente no es definible ningún predicado semántico que no lo sea, en última instancia, a partir de 'Vrd'; de aquí que cada uno de los metalenguajes intraducentes satisfagan la condición (ii) en la definición de semántica mínima, y que esta definición pueda simplificarse adandonando (ii) completamente. Esta observación supone evidentemente una «demostración» de que toda semántica intraducente es mínima.

En estas consideraciones acerca de la semántica mínima no hemos hecho distinción alguna entre teorías clásicas e inscriptivas. Ya hemos hablado bastante de las relaciones mutuas entre éstas. Poco se ganaría exigiendo que una semántica mínima fuera también inscriptiva o finita, aunque esto podría hacerse si se creyera conveniente (ya hemos señalado suficientemente la importancia del finitismo y de la teoría inscriptiva); además, la finitud es una propiedad de la sintaxis subyacente y no de la superestructura semántica. No requerimos que una semántica mínima esté basada en una sintaxis mínima (en cierto sentido), sino sólo que esté basada en una sintaxis de primer orden de los tipos tratados en los capítulos III u XI.

Tampoco pedimos que una semántica mínima sea la más simple: una semántica basada en un predicado monádico (como 'Vrd' o 'Univ') es, sin duda, más simple que otra basada en un predicado diádico no simétrico (como 'Cmpr'). Hemos visto en (VIII, E) que las diversas formulaciones de la semántica intraducente son, en realidad, equivalentes; podemos, pues, considerar que son todas mínimas; pero el hacer consideraciones acerca de la simplicidad respectiva de los predicados primitivos de dos sistemas y de sus axiomas y reglas podría conducirnos muy bien a preferir uno de ellos al otro.

G. Entender un sistema lingüístico

Según Carnap, podemos decir que «*entendemos* un sistema lingüístico, o un signo, una expresión o una proposición de dicho sistema lingüístico, si conocemos las reglas semánticas del sistema. También diremos que las reglas semánticas dan una *interpretación* del sistema lingüístico»[1]. Y también, «...entender una proposición, saber lo que ésta afirma, es lo mismo que saber en qué condiciones sería verdadera» [2]. Las reglas semánticas de un lenguaje son tales que «determinan una condición de verdad para cada proposición del lenguaje objeto, es decir, una conción necesaria y suficiente para que sea verdadera» [3]. Estas condiciones de verdad son probablemente extra-lingüísticas, es decir, que se refieren de un modo u otro a hechos no lingüísticos. Consideremos ahora lo que significa decir que entendemos, en este sentido, un sistema lingüístico cuya semántica esté formulada en MS^L_D o MS^L_O (*mutatis mutandis*, estas observaciones se aplicarán igualmente a los otros métodos desarrollados).

Las reglas semánticas *RDen1* y *RDen2* de MS^L_D proporcionan una condición necesaria y suficiente para que una proposición dada de L sea verdadera. Por ejemplo, '(x)(Px .v. ~Px)' es verdadera si y sólo si

(1) 'x_3(Px .v. ~Px)' denota cualquier objeto,

lo cual se realiza a su vez por una Regla de adecuación, si y sólo si

(2) para cualquier objeto x, o x tiene P o x no tiene P.

(1) es aquí una formulación distinta del enunciado según el cual '(x)(Px .v. ~Px)' es verdadero y no describe un hecho extra-lingüístico; (pero (2) proporciona una condición necesaria y suficiente extralingüística para que pueda decirse que '(x)(Px .v. ~Px)' es verdadera). La presencia de traducciones de las variables del lenguaje objeto en MS^L_D, donde se considera que abarcan los mismos objetos que las variables de L, asegura la imprescindible relación con los objetos. El que el predicado de verdad definido en MS^L_D sea adecuado, da la condición necesaria y suficiente para que una proposición de L sea verdadera; pero la condición de adecuación es demostrable a base de *RDen1* y *RDen2*; luego, conocer *RDen1* y *RDen2* (junto, por supuesto, con las reglas lógicas y sintácticas de MS^L_D) es entender L.

[1] R. Carnap, *Foundations of Logic and Mathematics*, pp. 10-11.
[2] R. Carnap, *Introduction to Semantics*, p. 22.
[3] R. Carnap, *loc. cit.*

Cuando tomamos el metalenguaje intraducente MS_C^L hallamos una situación completamente diferente. Aquí no tenemos traducciones de los elementos primitivos de L: los enunciados de MS_C^L hablan sólo de expresiones de L y no de objetos no lingüísticos; las reglas semánticas de MS_C^L sólo se refieren a expresiones de L y, por ello, no parecen proporcionar una relación con hechos extra-lingüísticos. ¿Qué significa decir que entendemos un sistema lingüístico L si su semántica está formulada dentro de MS_C^L?

Para responder a esta pregunta hemos de considerar más de cerca las distintas maneras de entender el elemento primitivo semántico 'Cmpr' de MS_C^L. Dentro de MS_D^L, definimos (en (IV, C))

'a Cmpr b' como '(ConsPred a . ConsPred b . $(x)(b$ Den x $.\supset.$ a Den $x)$)'.

Dentro de MS_D^L, si 'a Cmpr b', es válida, entonces a denota todo objeto *del campo fundamental de* L denotado por b; volviendo a MS_C^L, podemos explicar 'Cmpr' exactamente del mismo modo: dado L, cabe entender que 'a Cmpr b' expresa que a denota todo objeto del campo fundamental denotado por b. Por supuesto, no podemos hacer este enunciado dentro de MS_C^L; pero lo importante es que podamos considerar que 'a Cmpr b' expresa en MS_C^L *exactamente* lo mismo que en MS_D^L: decir que a Cmpr b en MS_C^L significa que a comprende b en tal y cual campo de individuos no vacío. Para todo lenguaje objeto L, se espera generalmente tener una multiplicidad de diferentes interpretaciones posibles; para dar estas diferentes interpretaciones se requieren diferentes relaciones de comprensión, cada una de las cuales proporciona una interpretación dentro de un campo apropiado.

Al entender 'Cmpr' de este modo, vemos que en MS_C^L podemos referirnos implícitamente a los objetos de L, aun cuando no podamos hacerlo explícitamente por medio de variables que los abarquen. Pero esta referencia implícita a los objetos de L es todo lo que hace falta: por medio de ella conseguimos una descripción semántica completa de L, y, en particular, sabemos exactamente de qué objetos hablan las expresiones que constituyen el lenguaje.

Podemos decir que entendemos L en el sentido de Carnap por medio del método de MS_C^L cuando conocemos las reglas semánticas de MS_C^L; y también que las reglas semánticas proporcionan una interpretación para L. La relación implícita con hechos lingüísticos que ofrecen estas reglas no da una condición no lingüística necesaria y suficiente para que pueda decirse que una proposición es verdadera, porque la condición de adecuación no se cumple explícitamente: dentro de MS_C^L sólo podemos formar otros enunciados acerca de L como condiciones necesarias y suficientes para el enunciado de que una proposición de L dada es verdadera. Pero esta limitación no implica que no se pueda decir que entendemos la proposición de L dada: al entender 'Cmpr' en el sentido apropiado vemos que MS_C^L proporciona una auténtica semántica de un modo esencialmente idéntico a como la proporciona la semántica traducente habitual.

Para ver esto con más claridad, echemos una nueva ojeada a $MS_C^{L'}$ (capítulo X), cuyo lenguaje objeto contiene una o varias constantes

individuales primitivas. A partir de uno de los teoremas de este metalenguaje (*TE6b*(X)), podemos demostrar inmediatamente que

$$\vdash \text{Vrd}\,(pe^{\frown}ay)\ .\equiv.\ ay\ \text{Sub}^{00}\ pe,$$

en otras palabras, que 'Pā' es verdadero en *L* si y sólo si *ay* soporta la relación Sub^{00} para *pe*. Por otro teorema semántico (*TE5*(X)) sabemos que *ay* es Unit^{00} y esto significa que *ay* denota un objeto, y sólo uno, del campo fundamental de *L*. Para saber que Vrd (*pe*⌢*ay*), basta, pues, con que el objeto que *ay* denote sea denotado también por el predicado *pe;* esto equivale en realidad a verificar que el objeto que *ay* denota tiene determinada propiedad. Saber que 'Pā' es verdadero no es, por tanto, otra cosa que saber que el individuo ā tiene la propiedad P.

Podríamos entender 'Cmpr' de un modo algo más amplio, de forma que '*a* Cmpr *b*' expresara que *a* denota cualesquiera objetos que denota *b*, sin especificar de qué objetos se trata. Una semántica basada en 'Cmpr' así entendido daría sólo una interpretación *parcial* de *L:* las reglas semánticas no nos permitirían nunca saber con exactitud de qué entidades se habla en *L;* pero en cambio nos dirían mucho acerca de las relaciones mutuas entre las diversas palabras (abstractas) de *L:* por ejemplo, que todo aquello que denota una lo denota también tal y cual otra, etc. Una interpretación parcial de este tipo bastaría para conseguir algunos fines semánticos, por ejemplo, una demostración de coherencia, pero es dudoso que esta semántica pueda contener un auténtico concepto de verdad en el sentido intuitivo. Pero ya hemos visto que MS^{L}_{σ} proporciona una interpretación completa de *L*, si se entiende 'Cmpr' en sentido estricto, de modo que no es necesario ocuparse más de las interpretaciones parciales.

De las diversas relaciones de comprensión, algunas tienen menor extensión que otras, según las diferencias que existan en los números de objetos a los que implícitamente se refieren. Por ejmplo, una relación de comprensión en el campo de los números naturales es menos extensa que una relación semejante en el de los números reales o complejos. Asimismo, una relación de comprensión cuyo campo se componga de un número finito de objetos de un tipo dado tiene menos extensión que una cuyo campo se componga de un número finito mayor o de un número infinito de objetos del mismo tipo: por ejemplo, la relación de comprensión cuyo campo se componga de los números naturales $\leqq 10$ tiene menos extensión que la relación de comprensión en el campo de todos los números naturales. Para volver a una observación hecha al final del § A, la semántica intraducente basada en la comprensión de un lenguaje objeto que hable acerca de un número finito de objetos de determinado género puede quizá considerarse más sencilla (en un sentido apropiado) que la semántica intraducente basada en la comprensión de un lenguaje objeto que hable acerca de un número infinito de objetos del mismo género o de géneros comparables. Esto se debería a que la relación de comprensión de la primera tiene menos extensión que la de la segunda.

Por último, debemos plantearnos la cuestión de si la semántica intraducente puede en rigor llamarse semántica con propiedad. Si pensamos que la semántica trata de las relaciones entre las expresiones lingüísticas

de un lenguaje y los objetos (comúnmente no lingüísticos) de los cuales habla el lenguaje, la semántica intraducente no contiene ninguna relación que sea propiamente semántica: las relaciones que contiene son definibles a base de relaciones propiamente semánticas, pero sólo se sitúan entre expresiones; tales relaciones podrían considerarse puramente sintácticas. Igualmente, si interpretamos 'Cmpr' en el sentido amplio antes indicado, la semántica intraducente proporciona una interpretación sólo parcial del lenguaje objeto y, por ello, no constituye en absoluto una auténtica semántica.

Ya hemos indicado que entendiendo 'Cmpr' en sentido estricto logramos una interpretación completa del lenguaje objeto dentro de MS^L_O de modo esencialmente igual que en MS^L_D; tal interpretación da también un auténtico concepto semántico de verdad. Asimismo, a base de la relación propiamente semántica de denotación múltiple pueden definirse varias relaciones importantes de MS^L_O (IV, C); por ser definibles a partir de relaciones propiamente semánticas pueden considerarse éstas como semánticas, aun cuando únicamente se refieran a expresiones. Puede verse tal cosa con más claridad si consideramos por un momento el metalenguaje semántico intraducente basado en 'Vrd' expuesto en (VIII, E): interpretando 'Vrd' en su sentido usual de concepto de verdad, el metalenguaje resultante es evidentemente semántico; aunque 'Vrd' se aplique sólo a expresiones, no por ello hemos de considerarlo como predicado sintáctico. (La situación es parecida a la que provoca 'Cmpr [1]'). De aquí que estemos justificados si hemos hablado siempre de *semántica* intraducente y hemos dicho que MS^L_O, $MS^{L'}_O$ y MSI^L_O eran metalenguajes *semánticos*.

Volveremos a tratar del constructivismo de primer orden en el § I, en donde se presupone el contenido del próximo parágrafo.

H. Hacia una teoría formal de los sistemas semánticos

Los metalenguajes semánticos desarrollados en este libro han sido generales, en el sentido, ya señalado, de que dado un L del tipo apropiado la semántica de L puede formalizarse dentro de estos lenguajes. Ninguno de los metalenguajes semánticos, sin embargo, es general en el sentido de aplicable a cualquier L, *siendo* 'L' *variable:* las diversas teorías semánticas antes desarrolladas sólo son aplicables cuando L está en cierto modo especificado por adelantado. Todavía está por formular una semántica general, en tanto que aplicable arbitrariamente a cualesquiera sistemas lingüísticos formalizados (de determinados tipos) tomados como valores para variables [2]. Bosquejaremos, algo someramente y a modo de ensayo, una teoría semejante en este apartado,

[1] El autor debe al profesor W. V. Quine haberle llamado la atención sobre esta semejanza.

[2] Cf., sin embargo, A. Tarski, «Grundzüge des Systemenkalküls», *Fundamenta Mathematicae*, 25 (1935), pp. 503-26, y 26 (1936), pp. 283-301, y K. Schröter, «Was ist eine mathematische Theorie?» *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 53 (1943), pp. 69-82.

así como un tipo de teoría de alcance ligeramente menor en la cual los lenguajes se identifican con clases o relaciones virtuales.

Para precisar el tipo de generalidad que buscamos necesitamos introducir variables que abarquen (y expresiones de clases virtuales que nombren) sistemas lingüísticos formalizados con y sin una interpretación especificada. Para ello es necesario aclarar y analizar aún más el concepto de sistema lingüístico formalizado. Este concepto se indicó vagamente en (I, A) y luego se han dado muchos ejemplos de lenguajes formalizados, pero ahora hemos de ser mucho más exactos.

Antes de considerar más detenidamente el concepto de lenguaje o sistema semántico interpretado, ocupémonos del de sistema logístico o cálculo no interpretado. En (I, A) hemos señalado que estos cálculos comprenden seis apartados: el vocabulario primitivo, una definición de 'fórmula' y posiblemente de 'término', axiomas, reglas de deducción, teoremas y definiciones. Hemos venido considerando que las definiciones son convenciones de abreviación y, por tanto, no esenciales. También, en las debidas circunstancias, podemos prescindir del concepto de término, como sabemos por (II, F). Supongamos, pues, que sólo tenemos los cinco apartados restantes; podríamos, a modo de prueba, considerar que éstos definen lo que es un sistema lingüístico no interpretado. Pero podemos incluso reducirlo más: para ello habremos de dar a la sintaxis un sentido algo más amplio del que le dimos en los capítulos III, XI o XII.

Para formular una teoría general de los sistemas logísticos como valores para variables (o como extensiones de expresiones para clases virtuales), debemos presuponer una estructura sintáctica en la que podamos hablar de más de un lenguaje objeto. En los capítulos III, XI y XII, todos los conceptos sintácticos se introducían con relación a un lenguaje objeto único. Es preciso, por tanto, examinar en primer lugar los cambios que se precisan en el capítulo III, por ejemplo (los que necesitan los capítulos XI o XII no son fundamentalmente diferentes); los perfilaremos a continuación muy brevemente.

Consideremos un número finito o infinito de lenguajes objeto L_1, L_2, etc., con o sin inclusión de la identidad. Para mayor simplicidad, admitiremos que no contienen constantes individuales ni funcionales primitivas, como ya hemos hecho con frecuencia anteriormente. Como elementos primitivos del metalenguaje bastan los nombres descriptivo-estructurales del capítulo III; cada constante predicado primitiva de los lenguajes objeto puede expresarse por medio de 'P' seguida de un número determinado de acentos: el limitado vocabulario del capítulo III bastará así para expresar simultáneamente las propiedades sintácticas de cualquier clase de lenguajes objeto de primer orden de capacidad finita o infinita. De momento no haremos distinciones entre estos lenguajes, pues nos contentaremos con considerar las propiedades sintácticas de los diversos símbolos; para fijar estas propiedades admitimos por medio de axiomas adaptaciones apropiadas de *RSin1*-*RSin3*, *TG4*(III) y *TG13*(III): la teoría resultante es la sintaxis elemental generalizada. Llamemos a este lenguaje *MG*, el metalenguaje (sintáctico) generalizado. Las variables tomarán como valores expresiones y cadenas

de expresiones de todos los lenguajes L que se consideren, mezclando todo de forma que no se distingan las expresiones de un lenguaje de las de otro.

Queremos mantener en *MG* las definiciones sintácticas del capítulo III: en particular, las de 'Ini', 'Acab', 'IngEnm', etc., deben conservarse igual que fueron dadas; pero, naturalmente, las variables abarcan ahora todas la expresiones de los lenguajes L indistintamente y no sólo las de algún L determinado. Queremos conservar algunos conceptos en este sentido general, en particular los de 'ConsPredPrim', 'FmlaAt', 'Fmla', 'ConsPred' y los definidos a partir de éstos, pero *también* querremos relativizarlos con respecto a un L dado: podemos establecer que 'ConsPredPrim_n a' expresa dentro de *MG* que a es una constante predicado primitiva de L_n; 'ConsPredPrim a' expresa, si consideramos un número infinito de lenguajes, que a es una *pe* o una *pe* seguida de una SartaAc; pero 'ConsPredPrim_n a' se define únicamente por enumeración de las constantes predicativas primitivas de L_n. Análogamente, 'Ax_n a' expresará que a es un axioma de L_n; y así sucesivamente con los otros conceptos relativizados. (Por supuesto, las fórmulas de L_n pueden ser de hecho las mismas que las de L_m: esto está permitido; y también los axiomas de L_n pueden ser los mismos que los de algún L_m. Examinaremos dentro de un momento las circunstancias en las cuales dos lenguajes L son equivalentes). De esto modo podemos formular la sintaxis de cada L dentro de *MG*. Adviértase que la relación CI de consecuencia inmediata no se relativiza, por no depender en modo alguno de su definición de los conceptos relativizados de fórmula, constante predicado y otros conceptos parecidos.

Vimos hace un momento que, a modo de ensayo, podíamos considerar que un sistema logístico o lenguaje no interpretado está determinado por cinco ingredientes, el vocabulario primitivo, las fórmulas, los axiomas, los teoremas y las reglas, y observamos que éstos podían reducirse aún más: en realidad, sólo con dar 'Ax_n' los otros conceptos de la sintaxis de L_n quedan determinados unívocamente. Podremos, pues, identificar L_n con *la clase virtual de sus axiomas.*

Veamos cómo, dado 'Ax_n', quedan determinados unívocamente los otros apartados que constituyen la definición de L_n. Consideremos, en primer lugar, 'FmlaAt_n'. Cada constante predicado primitiva de L_n aparecerá en algún axioma de L_n y, además, sólo con el número apropiado de variables como argumentos. El que a sea una *sarta de variables* puede definirse como sigue:

'SartaVbl a' puede abreviar '(Eb)(a IngEnm b . (c)(c IngEnm b :$\supset$: Vbl c .v. (Ed)(Ee)(d Ant_b c . e Ant_b c . c = ($d \frown e$))))'.

'FmlaAt_n a' puede definirse entonces a partir de 'Ax_n':

'FmlaAt_n a' abrevia '(Eb)(Ec)(Ed)(ConsPredPrim b . SartaVbl c . a = ($b \frown c$) . Ax_n d . a Apar d . ~(Ea'(Vbl a' . ($b \frown c \frown a'$) Apart d))'.

(Presuponemos que 'Ax_n d' está ya definido dentro de *MG* a base de elementos primitivos exclusivamente, de forma que aquí no se oculte ninguna circularidad. También podemos transformar esta definición en una equivalencia material, que probablemente sería demostrable.) Si '=' es un elemento primitivo lógico de L_n, debe añadirse al definiens

una cláusula referente a la identidad de fórmulas atómicas; 'Fmla_n' puede entonces definirse por ingredientes enmarcados, como en (III, D), y cabe fácilmente mostrar la unicidad de este concepto.

La relación de consecuencia inmediata de (en L_n), es simplemente CI limitado a las fórmulas de L_n.

'a CI_n b,c' abrevia '(a CI b,c . Fmla_n b . Fmla_n c)'.

Los teoremas de L_n son precisamente aquellas fórmulas que pueden obtenerse mediante un número finito de etapas de CI_n, por así decirlo, a partir de los axiomas de L_n. Este concepto es definible en *MG* por ingredientes enmarcados de modo esencialmente igual que en (III, F).

Hagamos que 'SP a' exprese dentro de *MG* que a es un símbolo primitivo de cualquiera de los lenguajes L_1, L_2, etc.; 'SP_n a' puede definirse entonces simplemente como 'SP a' para cada n, siendo los mismos los símbolos primitivos de todos los lenguajes L. (Recordemos aquí que 'P'', por ejemplo, no es un símbolo primitivo, sino una cadena.)

¿Qué es, entonces, exactamente un sistema lingüístico no interpretado? Dentro de una estructura sintáctica general como *MG*, cada L_n puede identificarse con el concepto expresado por 'Ax_n' y todos los apartados que constituyen la definición de L_n quedan así determinados unívocamente. El primero de los dos métodos sintácticos generales mencionados consiste en identificar L_n con la clase *virtual* de su axiomas. (Obsérvese que una clase virtual de axiomas no es un valor para una variable de clase en *MG*, porque este metalenguaje no contiene tales variables.) Se deduce de lo anterior que la sintaxis de cada lenguaje de primer orden puede manejarse sobre la base de dicha identificación; y dentro de *MG* podemos también establecer relaciones entre la sintaxis de los diversos lenguajes objeto, logrando así la base de una sintaxis comparativa.

El segundo método de conseguir una sintaxis general es introducir en *MG* variables de clase apropiadas; en vez de presuponer para ello una lógica básica de primer orden, hemos de emplear una de segundo orden. Los sistemas logísticos se identifican entonces con los tipos de clases apropiados y, por tanto, con valores de las variables. También en este caso tendríamos una base para la sintaxis comparada de los diversos lenguajes objeto considerados. Llamemos *MG'* a este lenguaje sintáctico general: *MG'* difiere, sobre todo, de *MG* en que presupone una lógica subyacente de mayor alcance.

La principal ventaja que posee el método de *MG'* sobre el de *MG* es que en *MG'* podemos *cuantificar* los sistemas logísticos, y, por lo tanto, formular teoremas de la forma 'existe un sistema logístico que tiene tal y cual propiedad' o 'todos los sistemas logísticos tienen tal y cual propiedad'. En cambio, *MG* es mucho más simple, es de primer orden con un campo fundamental de objetos numerable, etc., y tiene así muchas de las ventajas enumeradas al principio de este capítulo. En *MG* no podemos cuantificar los sistemas logísticos pero podemos, en cambio, introducir una expresión de clase virtual para cada uno en cuanto sea necesario.

(Tanto *MG* como *MG'* pueden transformarse en metalenguajes inscriptivos tomando inscripciones en lugar de figuras como valores para

las variables representativas de expresiones. En el caso de *MG* esto daría lugar probablemente a un auténtico nominalismo, quizá finitista. Pero la teoría que resultase de este modo del otro metalenguaje, *MG'*, no parecería muy interesante: sin duda alguna, no sería nominalista y en ella podrían reaparecer las figuras como valores de las variables de clase; no obstante, semejante metalenguaje podría resultar interesante por otros motivos).

Volvamos a la semántica y a los sistemas semánticos. Entenderemos por semántica la semántica intraducente. Podemos tomar como base de nuestro estudio cualquiera de las formulaciones equivalentes de la semántica intraducente: tomemos MS^L_C, que hemos desarrollado con cierto pormenor.

Cuando tenemos ocasión de hablar de más de una relación de comprensión es conveniente introducir un subíndice que indique el campo de individuos al que ésta se refiere implícitamente; y también emplearemos supraíndices para indicar a qué sistema lingüístico particular es relativa la relación.

$$\text{`}a \ \mathrm{Cmpr}^{n}_{Dm} \ b\text{'}$$

expresará, pues, que a comprende b en el campo de individuos no vacío D_m y en el sistema lingüístico L_n. Dentro de una semántica general necesitaremos varias relaciones de comprensión en diversos campos y en diversos sistemas lingüísticos. A fin de construir un metalenguaje semántico general sobre la base de *MG* para un número finito de sistemas L_1, L_2, etc., pueden tomarse como elementos primitivos unas expresiones para estas diversas relaciones de comprensión. *MSG*, el metalenguaje semántico generalizado, resultará de *MG* por adición de un número finito de elementos primitivos para las diversas relaciones de comprensión necesarias; se admiten axiomas afines a *RGC1-RGC14* para cada una de estas relaciones, y a partir de cada una de ellas pueden darse definiciones de los diversos conceptos semánticos fundamentales de (VIII, B y C), incluyendo un concepto semántico de verdad; estos conceptos se establecen con relación a un L_n dado, enunciándose las definiciones a base de la 'Cmpr^{n}_{Dm}' apropiada. Pueden definirse Hipótesis específicas de la comprensión, referentes a cada Cmpr^{n}_{Dm}, que establezcan que los axiomas no lógicos de L_n, si son proposiciones o clausuras de éstas, son verdaderos (en el sentido que determina debidamente Cmpr^{n}_{Dm}); de este modo logramos dentro de *MSG* una descripción semántica completa de los sistemas lingüísticos L_n.

Entre las varias relaciones primitivas de comprensión de *MSG* podemos tener, en realidad, más de una relación referente a un mismo L_n pero a dominios distintos; por ejemplo, 'Cmpr^{n}_{D1}' y 'Cmpr^{n}_{D2}' podrían ser ambos elementos primitivos de *MSG*, siendo D_1 distinto de D_2: las explicaciones anteriores permiten que esto suceda. Empleando estas relaciones de comprensión podemos construir diferentes interpretaciones para un mismo sistema logístico, y de este modo podemos comparar y contrastar dentro de *MSG* distintas interpretaciones del mismo sistema, así como considerar interpretaciones en el mismo campo de individuos de diferentes sistemas logísticos. Dentro de *MSG* nos es posible, por tanto, establecer los cimientos de una semántica comparativa;

para ello harían falta sin duda axiomas semánticos ulteriores que refiriesen unas relaciones de comprensión a otras de maneras adecuadas.

Como ejemplo de teorema de la semántica comparativa especialmente importante, echemos una breve ojeada al famoso teorema metamatemático debido a Löwenheim [1]. Supongamos que tenemos un campo de objetos no vacío, D, y una proposición, a, de uno de los sistemas lingüísticos de primer orden L_n. Podemos pensar que a está escrita por completo a base de elementos primitivos y que, por tanto, contiene una o varias apariciones de las constantes predicativas primitivas de L_n. (Para simplificar, supongamos que el signo de identidad no se incluye entre los elementos primitivos lógicos y que, en caso de admitirlo, será como una de las constantes predicativas primitivas no lógicas.) Podemos decir entonces que una proposición a es *cumplible* (erfüllbar) o *verdadera en el dominio* D_m si y sólo si a es verdadera en el sentido de 'verdadero' definido a partir de 'Cmpr^n_{Dm}' [2] para las proposiciones de L_n. En otras palabras, puede decirse que a es verdadera o cumplible en D_m cuando consideramos que las variables de a abarcan los objetos de D_m y cuando las constantes predicativas primitivas de a designan específicamente propiedades de los objetos de D_m o rela ciones entre ellos.

El llamado teorema de Löwenheim viene a afirmar que toda proposición de un sistema lingüístico de primer orden es cumplible en un dominio a lo sumo numerable, si lo es en algún dominio no vacío cualquiera, finito, numerable o no numerable. La demostración de Löwenheim requiere fundamentalmente un empleo muy complicado de subíndices, así como de expresiones que se supone contienen una cantidad infinita no numerable de términos. (Skolem ha dado varias demostraciones más sencillas y claras de este teorema[3]. La primera de ellas (1920) hace uso fundamentalmente del axioma de elección[4]: el empleo de este axioma, junto con ciertos procedimientos recurrentes, reemplaza al complicado sistema de subíndices de Löwenheim. En 1922 y 1929 Skolem dio otras demostraciones siguiendo directrices matemáticas constructivistas y en las cuales se evitaba el uso del axioma de elección [5].)

'Vrd^n_{Dm}' simbolizará el concepto de verdad para L_n definido dentro

---

[1] L. Löwenheim, «Ueber Möglichkeiten im Relativkalkül», *Mathematische Annalen*, 76 (1915), pp. 447-70.

[2] Cf. Hilbert y Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, p. 128 y *passim*. Véase también A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff*, pp. 318-27.

[3] Véanse Th. Skolem, «Logisch-kombinatorischen Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen», *Skrifter utgit av Videnskapsselkapet i Kristiania*, 4 (1920); «Einige Bermerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre», *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922* (Helsingfors, 1923), pp. 217-32 y «Ueber einige Grundlagenfragen der Mathematik», *Skrifter utgit av Det Horske Videnskaps-Akademi i Oslo* (I. Math.-naturw. Klasse 1929, núm. 4). En adelante nos referiremos a estos trabajos como Skolem (1), Skolem (2) y Skolem (3), respectivamente.

[4] Skolem (1), pp. 6-11.

[5] Skolem (2), 220-1 y Skolem (3), pp. 23-8.

de *MSG* a base de 'Cmpr^n_{Dm}'. Dentro de *MSG*, el teorema de Löwenheim enuncia que toda fórmula de la forma

$$\text{'}\mathrm{Vrd}^n_{Dm}\, a \;.\; \supset \;.\; \mathrm{Vrd}^n_{D0}\, a\text{'}$$

es demostrable, siendo D_0 el dominio de los números naturales. Presuponiendo axiomas semánticos de alcance suficiente, quizá puedan reflejarse en *MSG* una o varias de las demostraciones de Skolem.

Consideremos ahora los tipos de objetos de *MSG* con los cuales se han de identificar los sistemas semánticos. En *MG* identificábamos los sistemas logísticos con clases virtuales. Los sistemas semánticos incluyen, además del contenido de los logísticos, un concepto de verdad o una relación de comprensión; pero una relación de comprensión es también, en rigor, una relación virtual dentro de *MSG*; podemos, pues, identificar un sistema semántico con un *par ordenado virtual de una clase virtual* y una *relación virtual*. Pueden introducirse en *MSG* expresiones para pares ordenados virtuales repitiendo el procedimiento mediante el cual introdujimos expresiones de relaciones virtuales en (II, D). Recordaremos que podemos definir

$$\text{'}a'b'c' \in abc\mathfrak{z}\,\mathbf{X}\text{' como }\mathbf{X}',$$

en donde $\mathbf{X}'$ difiere de $\mathbf{X}$ del modo pedido, con lo cual logramos expresiones

$$\text{'}abc\mathfrak{z}\,\mathbf{X}\text{'}$$

para las relaciones virtuales triádicas. '$\mathbf{F}^k_1$', '$\mathbf{F}^k_2$', etc., representarán ahora expresiones para las relaciones virtuales k-ádicas. Podemos definir entonces

$$\text{'}\mathbf{F}^n_m\mathbf{F}^k_q\mathfrak{z}\,\mathbf{X}\text{'}$$

en un contexto como sigue.

'$\mathbf{F}^n_o\mathbf{F}^q_p \in \mathbf{F}^n_m\mathbf{F}^q_k\mathfrak{z}\,\mathbf{X}$' se define como $\mathbf{X}'$, en donde, (i) $\mathbf{F}^n_m$ y $\mathbf{F}^q_k$ son expresiones distintas cualesquiera para relaciones virtuales que no contengan variables libres y que no aparezcan en la fórmula $\mathbf{X}'$, (ii) $\mathbf{F}^n_o$ y $\mathbf{F}^q_p$ no contienen variables libres y (iii) $\mathbf{X}$ sólo difiere de $\mathbf{X}'$ por contener $\mathbf{F}^n_m$ y $\mathbf{F}^q_k$ en 0 o más lugares en que haya apariciones libres de $\mathbf{F}^n_o$ y $\mathbf{F}^q_p$ respectivamente en $\mathbf{X}'$.

Las expresiones para los sistemas semánticos pueden identificarse con expresiones de la forma

$$\text{'}\mathbf{F}^1_1\mathbf{F}^2_1\mathfrak{z}\,\mathbf{X}\text{'}$$

o de la forma

$$\text{'}\mathbf{F}^1_1\mathbf{F}^1_2\mathfrak{z}\,\mathbf{X}\text{'}.$$

Más concretamente, un L_n interpretado puede identificarse con un par ordenado virtual de una clase virtual $a\mathfrak{z}\mathrm{A}_n$ a y una relación diádica virtual $ab\mathfrak{z}a$ Cmpr^n_D b, o con un par ordenado virtual de $a\mathfrak{z}\mathrm{Ax}_n$ a y la clase virtual $a\mathfrak{z}\mathrm{Vrd}^n_D$ a ('Vrd^n_D' y 'Cmpr^n_D' pueden definirse mutuamente). El resultado es un poco más sencillo si adoptamos la segunda de las posibilidades aquí indicadas, según la cual un sistema semántico L_n cuyo campo fundamental es D se considera como un par ordenado para el cual se verifica

(1) $\quad \text{'}\mathbf{F}^1_1\mathbf{F}^1_2\mathfrak{z}(a)((\mathbf{F}^1_1\, a \;.\; \equiv \;.\; \mathrm{Ax}_n\, a) \;.\; (\mathbf{F}^1_2\, a \;.\; \equiv \;.\; \mathrm{Vrd}^n_D\, a))\text{'}$

siendo $\mathbf{F}^1_1$ y $\mathbf{F}^1_2$ abstractos monádicos cualesquiera escogidos previamente que no contengan variables libres. La expresión (1) puede abreviarse convenientemente en

(2) '$\langle \mathrm{Ax}_n, \mathrm{Vrd}^n_D \rangle$',

y

'SL_n'

(que se lee 'el sistema semántico L_n'), puede introducirse entonces como abreviación de (2).

Un segundo método de conseguir expresiones de sistemas semánticos es introducir variables de clase apropiadas y cuantificadores para éstas de dos tipos superiores. Las nuevas variables y cuantificadores se introducen para manejar clases de expresiones y pares ordenados de estas clases. Llamemos *MSG'* al metalenguaje formulado de este modo; dentro de *MSG'* un sistema semántico debe identificarse con un par ordenado de una clase de axiomas y una clase de verdades. Las ventajas y desventajas de *MSG'* con relación a *MSG* son parecidas a las de *MG'* con relación a *MG*.

Al cerrar este somero esquema de los dos métodos generales sintácticos y semánticos, consideremos las circunstancias en las cuales puede decirse que dos sistemas logísticos son *equivalentes*.

Sea dentro de *MG*

'L_n' la abreviación de 'Ax_n'.

Podemos ahora definir dentro de *MG* varios tipos de equivalencia *sintáctica*. En primer lugar,

'L_n AxEquiv L_m' puede abreviar '$(a)(L_n\, a\, .\equiv .\, L_m\, a)$'.

Se dice que dos sistemas logísticos son *axiomáticamente equivalentes* si y sólo si sus axiomas coinciden. Pero también podemos hacer que

'L_n TeorEquiv L_m' abrevie '$(a)(\mathrm{Teor}_n\, a\, .\equiv .\, \mathrm{Teor}_m\, a)$'.

Se dice que dos sistemas son *equivalentes con respecto a sus teoremas* si y sólo si cada teorema del uno es un teorema del otro y viceversa. También puede decirse que dos sistemas son *equivalentes con respecto a sus fórmulas* si y sólo si las fórmulas del uno son las mismas que las fórmulas del otro.

'L_n FmlaEquiv L_m' abrevia '$(a)(\mathrm{Fmla}_n\, a\, .\equiv .\, \mathrm{Fmla}_m\, a)$'.

Es obvio que, en vista de estas definiciones, tenemos

TH1. $\vdash L_n$ AxEquiv $L_m : \supset : L_n$ TeorEquiv $L_m\, .\, L_n$ FmlaEquiv L_m.

Pero también podríamos tener dos sistemas logísticos equivalentes con respecto a sus fórmulas que no lo fueran con respecto a sus axiomas o a sus teoremas. También

TH2. $\vdash L_n$ TeorEquiv $L_m\, .\supset .\, L_n$ FmlaEquiv L_m.

Existen otros tipos de equivalencia sintáctica que podríamos considerar, pero éstos parecen ser los más importantes. También existen varios tipos que pueden introducirse de *isomorfismo* sintáctico entre sistemas; esto sólo puede hacerse en *MG* con ciertas restricciones. Para las definiciones de isomorfismo preferiríamos probablemente emplear los métodos lógicos de mayor alcance de *MG'*.

Por último, consideremos dentro de *MSG* unas cuantas relaciones de equivalencia entre sistemas *semánticos*. Por regla general, un par ordenado $\langle M,N \rangle$ de clases virtuales se identifica con un par ordenado $\langle O,P \rangle$ de clases virtuales si y sólo si M es idéntica a O y N a P. Así, expresiones como

'$SL_n = SL_m$'

vienen ya dadas, y los dos sistemas semánticos pueden considerarse idénticos, si y sólo si sus axiomas son los mismos y sus verdades son las mismas (y en el mismo campo de objetos). Otro tipo de equivalencia semántica se obtiene cuando exigimos que L_n TeorEquiv L_m y que las verdades de ambos coincidan; y una tercera cuando exigimos que L_n FmlaEquiv L_w y que sus verdades coincidan. Si las verdades de dos sistemas semánticos no coinciden en un mismo campo de objetos, es dudoso que queremos considerarlos como equivalentes en ningún sentido estricto. Pero supongamos que tenemos dos campos de objetos D_1 y D_2, y admitamos que 'Vrd^n_{D1}' y 'Vrd^w_{D2}' estén definidos debidamente; supongamos, además, que D_1 y D_2 no sean el mismo y que, por tanto, o estén separados o se solapen. Si se tiene L_n AxEquiv L_m y coinciden Vrd^n_{D1} y Vrd^m_{D2}, tenemos un nuevo tipo importante de relación semántica que considerar; y otros dos, si se dan circunstancias análogas, pero si L_n TeorEquiv L_m o L_n FmlaEquiv L_m. También los tipos de isomorfismo son, pues, variados e interesentes.

Estas someras observaciones a modo de ensayo deben ser suficientes para hacer resaltar algunas de las características más sobresalientes de *MG*, *MG'*, *MSG* y *MSG'*.

I. La paradoja de Skolem

Al cerrar el estudio del constructivismo de primer orden y de su justificación filosófica y metodológica, nos ocuparemos de otro argumento en pro de los sistemas de primer orden numerables. Este argumento nace de la situación en los fundamentos de la matemática conocida como *paradoja de Skolem*. El descubrimiento de esta «paradoja» suele considerarse uno de los más importantes éxitos de la lógica moderna y tiene una amplia significación para las matemáticas, la filosofía y la metodología de las ciencias. Acerca de ella se ha escrito muy poco que no sea técnico, por lo cual daremos en este apartado final un breve resumen de la naturaleza de esta situación, de su significación para la matemática y para la teoría de los lenguajes formalizados y de su relación con el constructivismo de primer orden.

La paradoja de Skolem guarda una estrecha relación con una generalización del teorema de Löwenheim tratado en el parágrafo anterior. En realidad, la importancia de las demostraciones más simples que, como hemos dicho allí, dio Skolem del teorema de Löwenheim, se debe a que conducen inmediatamente a esta generalización. La generalización establece que si los miembros de un conjunto numerable de proposiciones de un sistema lingüístico de primer orden son cumplibles simultáneamente en un dominio no vacío (cualquiera que éste sea), entonces existe también un dominio a lo sumo numerable en el cual son también cumplibles simultáneamente. Más concretamente, supongamos que 'K' representa cualquier clase virtual (o clase) de expresiones de L_n. Sea 'Vrd^n_{Dm}', como en el § H, el símbolo del concepto de verdad para L_n tal como se define en *MSG* (o en *MSG'*) a partir de 'Cmpr^n_{Dm}'. Sea también D_0 el campo (numerable) de los números natu-

rales. Dentro de *MSG* (o de *MSG'*) la generalización del teorema de Löwenheim da como resultado que toda fórmula de la forma '$(a)(\mathrm{Prop}_n\, a\ .\ K\, a : \supset : \mathrm{Vrd}^n_{D_m}\, a)\ .\ \supset\ .\ (a)(\mathrm{Prop}_n\, a\ .\ K\, a : \supset : \mathrm{Vrd}^n_{D_0}\, a)$' es demostrable. La generalización, por su parte, es para 'D_m' variable, por cuyo motivo sólo puede expresarse en *MSG* (o en *MSG'*) como esquema. Skolem ha dado varias demostraciones de esta generalización, algunas de las cuales utilizan un axioma de elección[1]; tal vez puedan reflejarse estas demostraciones en *MSG* (o *MSG'*) mediante una elección adecuada de los axiomas semánticos.

El teorema de Löwenheim-Skolem, como suele llamarse a esta generalización, tiene consecuencias de la mayor importancia cuando se aplica a los sistemas de teoría axiomática de conjuntos de primer orden, como el *S* que hemos formulado (capítulo VI). Los axiomas y teoremas de tales sistemas pretenden, probablemente, proporcionar un análisis implícito del concepto de *conjunto*. Sería fácil montar una simple enumeración de la infinidad de proposiciones de uno de estos sistemas; entre los axiomas de teoría de conjuntos o entre sus consecuencias, aparecerán ciertos enunciados que, en su interpretación habitual, dirán que existen objetos de la teoría en cantidad no numerable. Por ejemplo, uno de los teoremas de teoría general de conjuntos enunciará que el número cardinal del conjunto de todos los números reales entre 0 y 1 es no numerable. La deductibilidad de este tipo de teoremas es, por supuesto, esencial si la teoría ha de ser adecuada para el análisis matemático. Pero según el teorema de Löwenheim-Skolem debe existir también una interpretación de los axiomas de teoría de conjuntos dentro de los límites de un campo numerable, por ejemplo, del de los números enteros positivos: en esta interpretación, el 'ε' de la teoría de conjuntos adquiere un significado que no sobrepasa la teoría de números, y todas las consecuencias de los axiomas deben seguir vigentes: así, el teorema referente al número cardinal de los números reales se transforma en un teorema acerca de los números enteros positivos. Ha desaparecido por completo lo no numerable y todos los teoremas a ello referentes; en otras palabras, si intentamos caracterizar lo no numerable por medio de un sistema axiomático de primer orden, siempre nos veremos conducidos a otra interpretación, esta vez dentro de los límites de lo numerable.

Este hecho sorprendente constituye la paradoja de Skolem. No se trata de una paradoja en el sentido de constituir una contradicción formal, sino en el más impreciso de ser una situación muy desacostumbrada e inesperada.

Estas consideraciones nos muestran también lo que Skolem llama la *relatividad del concepto de conjunto (mengentheoretischer Relativismus)*. Lo que hemos de entender por *conjunto*, así como por los diversos conceptos que de éste dependen, ha de ser siempre *relativo a un sistema axiomático dado en una interpretación determinada:* por ejemplo, 'finito', 'infinito', 'serie infinita simple', 'potencia del continuo', etc., representan conceptos que sólo tienen un significado relativo. Semejante

[1] Skolem (1), pp. 10-12; Skolem (2), pp. 220-5 y Skolem (3), pp. 28-9.

relatividad, señala Skolem, va ligada de un modo inextricable a todo sistema axiomático de primer orden que pretenda ser adecuado para la teoría clásica de los números reales.

Como ya hemos observado, esta situación no conduce a una contradicción formal. Decir que un conjunto infinito M es no numerable sólo tiene significado en el sentido de un conjunto particular de axiomas y en una interpretación particular: esto significa, en términos generales, que *dentro de la teoría* no existe ninguna correspondencia biunívoca entre los componentes de M y los de otro conjunto numerable cualquiera. Al nivel metamatemático, el campo fundamental de la teoría así como (el conjunto no numerable) M pueden hacerse corresponder biunívocamente con el conjunto de números naturales y, por tanto, también entre sí; esta correspondencia no puede construirse dentro de la teoría, sino únicamente en la metateoría.

La paradoja de Skolem también se da en los sistemas de primer orden basados en la teoría de tipos simplificada, como T (capítulo VI). Las clases, clases de clases, etc., de T se consideran objetos del campo fundamental y, por ello, la cuantificación de clases de clases, por ejemplo, es un caso especial de la cuantificación de los objetos del campo fundamental.

(En el trabajo de 1929, Skolem dio otra demostración de la relatividad de la teoría de conjuntos en la que no usaba el teorema de Löwenheim generalizado. Para esta demostración es precisa una formulación algo especial de la teoría axiomática de conjuntos: en esta formulación, que utiliza la función ε de Hilbert (II, F), se toman como elementos primitivos operaciones como la de formar el conjunto potencia de un conjunto, la de formar la pareja cardinal de dos conjuntos cualesquiera, etc.; también desempeña un importante papel una operación de abstracción ligada, es decir, la operación por medio de la cual se forma el conjunto de aquellos miembros de un conjunto dado que satisfacen una condición dada. Los axiomas, que comprenden el *Ersetzungsaxiom* (*S9* de (VI, A)), logran sustancialmente todo el alcance deductivo de los axiomas de Zermelo (incluyendo el *Ersetzungsaxiom*). Skolem establece entonces una enumeración simple de la totalidad de los términos y las fórmulas del sistema; puesto que el número de términos de esta enumeración es numerable, se da otra interpretación de cada término dentro del campo de los números naturales: de aquí que las fórmulas de la teoría se vuelvan cumplibles dentro de un campo numerable.)

Se han construido algunos sistemas de gran alcance que aspiran a poner remedio a la situación. Si se ha de construir una teoría axiomática de conjuntos, por ejemplo, que en cierto modo evite aquélla, se requiere probablemente algún supuesto previo de que la lógica básica es no numerable. Podría pensarse que un modo de llevarlo a cabo sería presuponer un cálculo lógico de *segundo* orden como parte de la lógica básica; pero si se considera que la teoría de conjuntos es un intento de analizar el concepto de conjunto, esto conduciría a una especie de círculo vicioso: el supuesto de un cálculo lógico de segundo orden equivale a la admisión previa del concepto de conjunto, precisamente el

que tratábamos de analizar. Como ha señalado Skolem, al formular una teoría axiomática de conjuntos no debemos presuponer el propio concepto de conjunto, sino un concepto metamatemático de dominio o campo («Bereich»): presuponer el concepto de conjunto en la lógica básica sería probablemente contrario a la idea misma de una teoría axiomática de conjuntos.

El tipo de formulación que proporciona T_ω (VI, G) a la teoría de tipos simplificada evita a la vez la paradoja de Skolem y la especie de círculo vicioso mencionado más arriba. Pero este sistema no puede considerarse de primer orden—en realidad debemos considerar T_ω en su totalidad como la lógica básica—; tampoco puede pensarse que nos asegure una caracterización axiomática de los conceptos de individuo, clase, clase de clases, etc., pues dichos conceptos se presuponen más bien en la lógica subyacente. Es conveniente reducir ésta al mínimo, y parece existir un completo acuerdo acerca de que la lógica de primer orden debe proporcionar una lógica básica adecuada para la teoría de conjuntos (y por tanto, para la matemática), y posiblemente también para las teorías científicas y filosóficas; luego este tipo de interpretación de la teoría de tipos simplificada no es completamente satisfactoria, desde el punto de vista de la caracterización axiomática del concepto de conjunto.

Un tercer tipo posible de sistemas de los que pueda decirse que evitan la paradoja de Skolem ha de hallarse en los sistemas intuicionistas o en los basados en la teoría de tipos ramificada[1]. Estas teorías están, sin embargo, fuertemente restringidas, y no pueden fundamentar la totalidad del análisis clásico. En el caso de los dos tipos de sistemas que hemos mencionado más arriba se consigue una adecuación para la totalidad prácticamente del análisis matemático; de aquí que las teorías ramificadas e intuicionistas sean demasiado limitadas desde el punto de vista que ahora consideramos.

Aunque existen «soluciones» de estos tres tipos, ninguna de ellas puede encontrarse plenamente aceptable. La paradoja de Skolem supone una seria denuncia de todos los sistemas axiomáticos conocidos cuyo alcance basta para el análisis matemático: todo sistema de primer orden conocido que tenga el alcance suficiente, o bien se halla directamente en la situación de la paradoja o bien puede interpretarse de forma que lo esté; además, como observa Gentzen, no es en absoluto «ersichtlich» [*previsible* (*T.*)] que pueda construirse un lenguaje de primer orden y de suficiente alcance que la evite [2].

---

[1] Véanse, p. ej., A. HEYTING, «Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930, Phys.-nath. Klasse), pp. 42-56, 57-71 y 158-69, y, p. ej., F. B. FITCH, «The Consistency of the Ramified *Principia*», *The Journal of Symbolic Logic*, 3 (1938), pp. 140-9.

[2] G. GENTZEN «Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grunlagenforschung», *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften* (Hirzel, Leipzig, 1938): pp. 1-18; también *Deutsche Mathematik*, 3 (1938), pp. 255-68. Para otras observaciones (por G. D. W. BERRY y J. R. MYHILL) acerca de la significación ontológica y epistemológica de la paradoja de Skolem, véase el simposio «On The Ontological Significance of the Löwenheim-Skolem Theorem», *Academic Freedom, Logic, and Religion*, Papers of the American Philosophical Association, Eastern Division (University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1953), pp. 39-70. Para otros

Vemos ahora la relación existente entre esta situación y los metalenguajes semánticos formulados más arriba.

Para un L no numerable, todo metalenguaje semántico traducente de L, de cualquier manera que se formule, está sujeto a esta situación. Esto se hace patente si observamos que el número cardinal del campo fundamental del metalenguaje debe ser, al menos, tan grande como la del propio L. Para un L numerable, también está sujeto a esta situación un metalenguaje traducente basado en definiciones (VII, E), porque para definir las relaciones semánticas, hacen falta en él objetos de tipo superior y cuantificadores de éstos. En cambio, para un L numerable, MS_D^L y los metalenguajes semánticos afines formulados en este libro evitan la situación a que nos referimos; por lo pronto, pues, el campo fundamental de este metalenguaje es numerable. Por supuesto, si L es no numerable, MS_D^L y los metalenguajes semánticos afines se encuentran en la situación mencionada: para evitarla es necesario que L sea numerable; pero, incluso, evitarla así, con un L numerable, supone una importante ventaja de la semántica traducente basada en elementos primitivos especiales (como la denotación múltiple) sobre las formulaciones más habituales. Los metalenguajes semánticos intraducentes, como MS_C^L, evitan completamente la situación de que hablamos, pues su campo fundamental es numerable independientemente de que L lo sea o no.

Sin duda alguna, suele esperarse que un sistema lingüístico cualquiera, sea o no un metalenguaje, tenga varias interpretaciones posibles. El punto crucial que subraya la paradoja de Skolem es que, en las dos interpretaciones de que trata, los campos fundamentales tienen diferentes números cardinales: y esto es lo que evitan los metalenguajes semánticos que hemos expuesto. El argumento de Skolem puede, evidentemente, proporcionar una segunda interpretación para cada uno de estos lenguajes, pero también en ésta será numerable el campo fundamental de individuos.

La existencia de la paradoja de Skolem nos da otro argumento en pro de la máxima metodológica general. Los sistemas lingüísticos de primer orden numerables, ya sea como lenguajes objeto o como metalenguajes sintácticos o semánticos, evitan la situación *ab initio:* por tanto, no puede considerarse que esta situación suponga una base de crítica para tales sistemas. La preferencia por lo numerable de que hemos dado muestras en todo el libro, y en particular, al formular la semántica intraducente, está, pues, firmemente basada en el teorema de Löwenheim-Skolem.

---

trabajos importantes relacionados de un modo u otro con esta situación, véanse, por ejemplo, L. HENKIN, «Completeness in the Theory of Types», *The Journal of Symbolic Logic*, 15 (1950), pp. 81-91; J. B. ROSSER y HAO WANG, «Non-Standard Models for Formal Logics», *ibid.*, pp. 113-29; Hao Wang «Arithmetical Models for Formal Systems», *Methodos*, (1951), pp. 217-32, y «Arithmetic Translations of Axiom Systems», *Transaction of the American Mathematical Society*, 71 (1951), pp. 283-93. Véase también J. KEMENY, «Unified Foundations for Semantics», en preparación, y Th. SKOLEM *et al.*, *Mathematical Interpretatation of Formal Systems* (North-Holland Publishing Co, Amsterdam, 1955).

INDICES

Indice de autores

Ackermann, W., 46n, 61, 65n, 68n, 148n, 262.
Aquino, Santo Tomás de, 127n.
Aristóteles, 127,n.

Beierle, J., 16.
Bernays, P., 46n, 50n, 61, 64n, 67n, 76, 78, 143, 145n, 161n, 174n, 277n.
Berry, G. D., 169n, 283n.
Beth, G. D. W., 16, 18.
Birkhoff, G., 117n.
Bochenski, I. M., 127n.
Braithwaite, R. B., 18n.
Brouwer, L. E. J., 258.
Burali-Forti, C., 34.

Carnap, R., 15, 31n, 33,n, 36,n, 37,n, 41, 42, 44, 72n, 74n, 77,n, 78,n, 83n, 102n, 123n, 131n, 144n, 164n, 167n, 259, 261, 269n, 270.
Chomsky, N., 225n.
Church, A., 15, 41, 46n, 48n, 61, 65n, 68n, 145, 161n, 164n.
Chwistek, L., 41, 80, 150n, 256.
Clarke, F., 16.
Copi, I., 46n.
Couturat, L., 117n.

De Morgan, A., 53.

Epiménides, 35, 137, 140.
Eubúlides, 35.

Fitch, F. B., 15, 31n, 33n, 65n, 78,n, 139,n, 221n, 283n.
Fraenkel, A., 145,n.
Frege, G., 15, 29, 259.

Gentzen, G., 263, 283n.
Gödel, K., 81, 137, 138, 142,n, 145n, 220.
Goodman, N., 15, 33n, 43, 75, 78,n, 185n, 223n, 225, 232n, 258n, 259,n, 260, 261, 262, 263n.
Götlind, E., 50n.

Harris, Z., 35n.
Hempel, C. G., 15, 31n.
Henkin, L., 283n.
Heyting, A., 283n.
Hilbert, D., 46n, 61, 64n, 65,n, 66, 67n, 68n, 76,n, 78, 143, 161n, 174n, 193, 252, 277n, 282.
Hiz, H., 16.
Hobbes, T., 40,n, 110n, 111n, 198n.
Hull, C., 31, 78,n.
Huntington, E. V., 143,n.
Hutten, E., 18n.

Jevons, W. S., 40.

Kaplan, A., 127n.
Kemeny, J., 144n, 154n, 172n, 258n, 284n.
Keynes, J. N., 40.
Kleene, S. C., 46n.
Kuratowski, C., 153,n, 160, 161.

Leblanc, H., 46n.
Lesniewski, S., 75.
Lewis, C. I., 78,n.
Löwenheim, L., 277,n, 278, 280, 281, 284.

McKinsey, J. C. C., 31n.
MacLane, S., 117n.
Meager, R., 16.
Mill, J. S., 22n, 40.
Morris, C., 35n.
Morrow, G. R., 16.
Myhill, J., 221n, 283n.

Nagel, E., 15.
Neumann, J. von, 145n.

Ockham, W. of, 111n.
Ogden, C. K., 73n.

Peano, G., 29, 61,n, 77.
Peirce, C. S., 74,n.
Platón, 29.
Price, H. H., 15.

Quine, W. V. O., 15, 41, 43, 46n, 49n, 62, 70, 75, 80,n, 87n, 89, 142, 145n, 193n, 219n, 223n, 225, 232n, 256, 259, 260, 261, 262, 272n.

Ramsey, F., 34n, 150n.
Rasiowa, H., 50n

Reichenbach, H., 31n.
Rieman, G. F., 16.
Robbins, B. L., 16.
Rosser, B., 46n, 140n, 142n, 284n.
Russell, B., 15, 21n, 24, 29, 30, 34, 41, 66, 67n, 143, 144, 150,n, 151, 153, 200n, 209, 225n, 259.
Ryle, G., 39n.

Savage, T. R., 16.
Schmidt, A., 72n.
Schrecker, P., 16, 34n.
Schröter, K., 272n.
Skolem, T., 145,n, 189, 262,n, 277,n, 278, 280, 281,n, 282, 283,n, 284,n.
Suger, J., 31n.
Suppes, P., 31n.

Tarski, A., 15, 33, 41, 42, 44, 74n, 80,n, 81, 83n, 107n, 112n, 114n, 117n, 123n, 127,n, 135n, 139,n, 141n, 143,n, 144n, 150n, 152n, 170n, 172n, 174n, 183n, 186n, 220, 256, 261, 272n, 277n.
Taylor, A. E., 29,n.

Wang, H., 18n, 72n, 144n, 148n, 172n, 284n.
Wessel, A., 229n.
Whitehead, A. M., 7, 21n, 28,n, 29, 67n, 150n, 200n, 259.
Wiener, N., 153,n, 160, 161.
Woodger, J. H., 15, 18n, 25,n, 28,n, 29n, 31n, 78,n, 83n, 111n, 223n, 239n.

Zermelo, E., 30, 33, 42, 71, 143, 144, 145,n, 149, 189, 282.

Indice de materias

(la) Abstracción en la ciencia, 36 ss.
— , operación de, 61 ss., 89, 155 s., 210 s, 214, 226, 234, 278. *Véanse también* Regla(s) *y* Teorema (s).
Abstractos vacíos y verdad, 244 ss.
Adecuación de una definición de verdad, 123 ss., 181, 243 ss. *Véase también* Regla(s).
Algebra booleana, 43, 105, 117 ss., 186, 190 ss.
Aparición de una expresión, 92 s.
Asunto, 23.
Autorreferencia, 137.
— y comprensión, 218 ss.
'Axioma de *L*', 93 ss., 236, 274 s.
'Axioma de *S*', 149 ss.
'Axioma de *T*', 155 ss.
Axiomas descriptivos, 65, 95, 236.
— lógicos, 49 s., 62, 64, 95, 236.
— multiplicativos, 153.
Véase también Regla(s), *así como los nombres concretos de los axiomas y los sistemas.*

Campo abarcado por una variable, 110, 159.
— de individuos, 70 ss., 276 ss.
Casi comillas, 48.
Casi fórmula, 234, s.
Clases, 75, 151 ss., 264.
— virtuales, 62 s., 112, 264.
Clausura de una fórmula, 97.
Coextensividad, 110, 179, 240, 248.
Coherencia *o* Compatibilidad, 26 s., 40, 42, 43, 103, 128 ss., 157 s., 202, 250, 257 s.
— relativa, 134, ss., 202, ss., 250.
Comillas, 48 s.
— teoría formalizada de las, 251 ss.
Completitud, 27, 103, 133, 140, s.
Comprensión, 110, 177, s., 185, s., 240, 247, 270, s., 276.
Condicional material, 49, 89, 235.
Conjunto nulo, axioma de existencia del, 146, 149.
Consecuencia, 19, 25.
— inmediata, 89, 275.
Constantes, 19.
— funcionales, 19, 43, 45, 46, s., 67, s., 217, s.
— individuales, 19, 43, 45, 46, s., 67, s. 210, ss., 250, s.
— lógicas, 19, 45, 96.
— predicativas, 19, 45, 88, 96, 156, s.
— — comunes, 111, 180, 240.
— — definidas, 62.
— — nulas, 111, 179, 240.
— — unitarias, 111, 180, 240.
— — universales, 111, 179, s., 186, s., 240.
Constructivismo semántico, 258, ss.
Conyunción, 49, 89, 235.
Cuantificadores, 45, 49, 59, s. *Véanse también* Regla(s) *y* Teorema(s).
Cumplibilidad, 277, 280, 282.

Decidibilidad, 140, ss.
Deductibilidad, 102.
Definiendum, 21.
Definiens, 21.
Definición abreviadora, 19, 21, 27,s.
— recurrente, 20, 47, s., 80, 171, s.
Demostración, 21, 51, 84, 102, 236, ss.
Denotación múltiple, 105, ss., 112, s., 169, 214, 239, s.
Designación, 164, ss., 168, s.
Determinación, 167, ss.
Dialéctica, 14.
Discreción semántica, 185.
Disyunción, 46. *Véase también* Regla(s).

Economía, 257, s.
Elección, axiomas de, 147, 149, 153.
Emparejamiento, axioma de, 146, 149.
Empirismo, 19.
Encadenamiento, 81, ss., 227, ss.
Entender un sistema lingüístico, 269, ss.
Equivalencia deductiva, 103.
— entre sistemas, 279, s.
— material, 49, 89, 132.
Excluyentes, 132.
Existencia de clases, axioma de, 152, s.
Explicación, 33, s.
Expresiones, 19, 74, s., 86, s.
— denotadoras, 40, 179, 185, 248. *Véase también* Regla(s).
Extensión de una constante predicativa, 111, s., 240.
Extensionalidad, axiomas de, 146, 149, 152.

Falsedad, 131.
Finitismo, 258, ss.
Formación de subconjuntos, axiomas de, 147, s., 149.
Formalización, 18, ss.
Formas, 43, 74, s., 81, s., 241. *Véase también* Regla(s).
— normales, 68, ss., 120, ss., 123, ss.
— verdaderas, 241.
Fórmula, 19, s., 47, 72, 88, ss., 145, 232, ss. *Véanse también los nombres de los sistemas concretos.*
Funciones proposicionales, 20, 93, 96.
Fundación, axioma de, 148, 150.

Generalización, regla de, *véase* Regla(s).

Hipótesis específicas de la comprensión, 199, ss., 220, 265, s.

Identidad, 62, ss., 148, 153, 228. *Véanse también* Regla(s) *y* Teorema(s).
Implexión, 193, s.
Implicación material, 132.
— semántica, *véase* Implexión.
Indecidibilidad, 140, ss.
Individuos, 45.
— en sentido amplio, 70, s.
— en sentido estricto, 70, s.
Individuos$_1$, 161.
Individuos$_2$, 161.
Inducción matemática, 77.
Infinitud, axioma de, 147, s., 149, 153.
Ingredientes enmarcados, métodos de los, 89, ss. *Véase también* Regla(s).
Inscripciones, 43, 74, ss., 81, s., 223, ss., 247, ss., 267, ss.
Interpretación, 22, ss.
— atípica, 23, 281, ss.
— parcial, 271.
— típica, 23.
Isomorfismo entre sistemas, 279, s.

L, 64, s.
L^*, 133, s.
Lenguaje objeto, 25, s., 72, s.

M, 80, ss.
Máximas metodológicas, 71, 255, ss., 261.
Meta-axioma, *véase* Regla(s).
Metalenguajes, 25, s., 72, ss.
— semánticos, 74, 105, ss., 211, ss., 240, ss.
— sintácticos, 74, 79, ss., 210, s., 225, ss.
Metamatemática, 30.
Metateoremas, *véanse* Regla(s) *y* Teorema(s).
MG, 273, ss.
MG', 275, ss.

Miembros conyuntivos, 132.
— disyuntivos, 132.
Modus ponens, *véase* Regla(s).
MS_C^L, 178, ss.
$MS_C^{L'}$, 209, ss., 215.
MS_D^L, 107, ss., 173.
$MS_D^{L'}$, 209, ss.
MS_D^L+, 140, ss.
MS_C^S, 199, ss.
MS_D^S, 149, ss.
MS_D^T, 155, ss.
MSG, 276, ss.
MSG', 279, s.
MSI_C^L, 247, ss.
MSI_D^L, 239, ss.
MSS_C, 219, ss.

Negación, 46. *Véase también* Regla(s).
— semántica, 113, 181, 240.
Negrilla, uso de la letra, 48, s.
Nombres, *véase* Constantes.
— propios, 211, 219, 250, ss.
Nominalismo, 43, 75, 258, ss.
Numerabilismo, 262, ss.

Paradoja(s), 34, ss.
— de Burali-Forti, 34.
— de Epiménides, 35.
— de Russell, 24, 34, 151.
— de Skolem, 280, ss.
Parejas ordenadas, 153, s., 278.
Pedagogía, 28.
Pertenencia, 146, 151.
Postulados de Peano, 76, s.
Potencia, axioma de, 147, 149.
Producto semántico, 113, 180, 240.
Proposiciones, 35n, 93.
— universales, 96.
— — atómicas, 68, 96.

Quale, 78.

Racionalidad, 29, s.
Realismo, 260, ss.
Reconstrucción racional, 33, s.
Recurrentes, ecuaciones, 77.
Regla(s), 49, s.
— de abstracción, 62, 95, 152.
— de abstractos vacíos, 184.
— de adecuación, 123, 124, s., 244, 246.
— de coherencia o compatibilidad, 131, 202, 246, 250.
— de comprensión, 182, ss.
— de cuantificación, 50, 94, 113, 152.
— de deducción, 21, 50, s.
— de denotación, 114, 156, 242.
— de designación, 165, s., 168.

— de determinación, 167, s.
— de discriminación, 184.
— de disyunción, 126.
— de diversidad, 83, 155, s.
— de existencia, 229, s.
— de expresiones, 101.
— — — denotadoras, 182.
— de formas, 230.
— de funciones veritativas, 49, s.
— de generalización, 50, s., 88, 152, 196.
— de identidad, 64, 83, 94.
— de inducción infinita, 83, s.
— de ingredientes enmarcados, 99.
— de la suma, 183.
— de los productos semánticamente nulos, 183.
— de los productos semánticos no nulos, 183.
— de negación, 125, 183.
— de restricción, 114, 156, 242.
— de satisfacción, 163, ss.
— de substitución, 55, s.
— del Modus ponens, 50, 88, s.
— del producto, 183.
— derivadas, 52.
Véanse también Teorema(s) *y nombres de sistemas concretos.*

S, 145, ss.
Satisfacción, 42, 112, 163, s., 168, s., 171, s. *Véase también* Regla(s).
Semántica, 26, 73, s.
— definitoria, 170, ss.
— intraducente, 42, 177, ss., 264, ss.
— mínima, 39, ss., 177, ss.
— traducente, 42, 105, ss., 265, ss.
Signos conectivos, 46.
— figuras, *véase* Formas.
— sucesos, *véase* Inscripciones.
Sintaxis, 26, 73, s., 275.
— de primer orden, 79, ss., 149, ss., 155, ss., 210, s., 225, ss., 250, 282, ss.
Sistemas lingüísticos, 18, ss., 275, ss.
— — de orden finito, 159, ss.
— — de primer orden, 41, 45, ss., 71, 76, ss.
— — enteramente formalizados, 32.
— — parcialmente formalizados, 32, s.
— — simples y aplicados, 65.
Sistemas logísticos, 18, ss., 273, ss.
Solapamiento semántico, 185.
Substitución, axioma de, 148, 150. *Véase también* Regla(s).
Subsunción, 110, 179, 240.

T, 151, ss., 160, s.
$T\omega$, 160, ss.
Teorema(s), 19, 21, 51, s. *Véase también* Regla(s).
— de abstracción, 63.
— de constantes individuales, 211, 216, s., 250, s.
— de cuantificación, 58, ss.
— de descripciones, 66, s.
— de designación, 166.
— de determinación, 167, s.
— de encadenamiento, 84, ss., 231, 238, s.
— de Löwenheim, 277, ss.
— de nombres propios, 211, s., 250, s., 260.
— de Skolem, 281.
— descriptivo, 96.
— lógico de *L'*, 95, 238.
— semánticos, 115, ss., 128, ss., 190, ss., 201, ss., 216, ss., 243, 249, 253.
— sintácticos, 84, ss., 98, ss., 231, ss., 238, s.
'Teorema de *L'*, 95, ss., 235, ss.
Teoría de conjuntos, 145, ss.
Teoría formalizada de los sistemas semánticos, 272, ss.
Términos, 20, 47, 72, 210, 218.
— sintácticos, 108.
Tipos, teoría simplificada de los, 150, ss.
— transfinitos, 172.

Univocidad, principio de, 41.

Variables, 19, 45, 80, 87, s., 152, 155.
— libres, 50, 62, 92, s., 235.
— ligadas, 50, 62, 92.
Verdad, 21, 26, 33, 119, ss., 157, 164, 166, s., 181, s., 212, s., 215, 240, 244, ss.
Vocabulario descriptivo, 29.
— lógico, 29.
— primitivo, 18, s., 46.

Indice de símbolos de las metateorías formalizadas

Abst, 89, 156, 210, 234.
AbstVac, 245.
ac, 81.
Ac, 226.
AC, 219.
Acab, 87, 232, 274.
Ant_b, 91, 97.
Apar, 92.
Apar_c, 92.
Apar_cLb, 93.
Apar_cLg, 92.
Ax, 95, 156, 236.
Ax_n, 274.
AxAbst, 95, 211, 236.
AxCnjtoNulo, 149.
AxCnjtos, 150.
AxCuantl-2, 94, 211.
AxDes, 95.
AxElecc, 149.
AcEquiv, 279.
AxExt, 149.
AxFormSbcnjtos, 150.
AxFund, 150.
AxFV1-4, 93, 235.
AxId1-2, 94, s., 211, 236.
AxInf, 149.
AxLog, 95, 236.
AxPar, 149.
AxPot, 149.
AxSum, 149.
AxSust, 150.
ay, 210, 219.
Ay, 250.
Ay', etc., 250.
AY, 219.

C, 227, 229.
C_E, 235.
Car, 229.
CasiFmla, 234.
cdn, 219.
CDN, 219.
CI, 89, 236.
CI_n, 275.
Clau, 97, 238.
Clau', 97, 238.
CM, 235.
cmp, 219.
CMP, 219.
CmpltSem, 133.
Cmpr, 110, 178, 185, 186, 240, 247, 271, 272.
Cmpr', 202, 203.
$\text{Cmpr}^{\circ\circ}$, 215.
$\text{Cmpr}^{n}_{\mathfrak{D}_m}$, 276.
Cnst, 103.
CoExt, 110, 179, 240, 248.
$\text{CoExt}^{\circ\circ}$, 215.
Com, 111, 180, 240.
ConsFun, 218.
ConsIn, 210.
ConsPred, 96, 238, 274.
ConsPred^{n+1}, 156.
ConsPredPrim, 88, 232.
ConsPredPrim_n, 274.
Cony, 121, 132.
ConyMin, 121.
cu, 89.
Cuant, 233.
cuexis, 89.

D, 233.
D_E, 234.
DedEquiv, 103.
Deduc, 102.
Dems, 102, 237.
Den, 106, 112, 169, 214, 240.
Des, 165, 168, 169.
Det, 167, 168.
DFL1, 133.
DFL2, 133.
Disy, 121, 132.
DisyMin, 121.
dscd, 89.

ED, 179, 185, 248.
$\text{ED}^{\circ\circ}$, 215.
efe, 217.
epinv, 81.
EPINV, 219.
Equiv, 132.
Etapa, 236, 237.
Excl, 132.

Exp, 86.
Ext, 111, 112, 240.

F_iV, 242.
F_iV_1, 241.
F_iV_2, 241.
Fls, 131.
Fmla, 91, 210, 234, 274.
$Fmla_n$, 275.
FmlaAt, 88, 155, 210, 232, 274.
$FmlaAt_n$, 274.
FmlaEquiv, 279.
FNC, 121.
FNP, 122.
FunPropDos, 96.
FunPropEst, 93.
FunPropUna, 96, 238.

Gen, 88, 236.

HEC, 200, 220.

id, 81.
Id, 226.
ID, 219.
IgLng, 233.
IgPar, 233.
Imp, 132.
IngEnm, 91, 97, 274.
Ini, 87, 232, 274.

L_n, 279.

MisTp, 155.
MLrg, 228.
MP, 88, 89, 236.

N, 238.
NbrPr, 211, 218, 250.
Neg, 113, 181, 240.
Neg′, 204.
Nula, 111, 179, 186, 240.
Nula′, 204.

O, 185.

Parte, 228.
pd, 81.
Pd, 226.
PD, 219.
pe, 81.
Pe, 226.
pi, 81.
Pi, 226.
PI, 219.
PrI, 140.
Prod, 113, 180, 240.
Prod′, 204.
Prop, 93, 238.
PropUniv, 96, 238.
PropUnivAt, 96, 238.
punto, 89.

qis, 81.
Qis, 226.

S_c^b, 211.
S'^b, 211.
Sl_c^b, 210.
Sl'^b_c, 211.
$S?_c^b$, 211.
$S?'^b_c$, 211.
S_{pd}^{epinv}, 120.
SartaAc, 87, 232.
SartaCuant, 96, 238.
SartaImpTilde, 246.
SartaImpTildes, 171.
Sarta Par, 245.
SartaParTilde, 246.
SartaParTildes, 171.
SartaSubind, 155.
SartaTilde, 246.
SartaVbl, 274.
Sat, 112, 163, 169, 171.
SatPsAt, 171.
Seg, 87, 232.
Sem, 233.
SL_n, 279.
SLb_c^b, 94, 156, 236.
$SLbl_c^b$, 94, 156.
$SLb?_c^b$, 94, 97, 156.
SP, 85, 155, 275.
SP_n, 275.
Sub, 110, 179, 240.
Sub°, 212.
Sub°°, 215.
subind, 155.
Sum, 113, 180, 240.
Sum′, 204.

Teor, 95, 150, 210, 238.
Teor′, 202.
TeorDes, 96.
TeorEquiv, 279.
TeorLog, 96, 239.
tilde, 81, 89.
Tilde, 226.
TILDE, 219.
triguión, 89.
Trm, 210, 218.

Unit, 111, 180, 240.
Unit°°, 215.
Univ, 111, 179, 186, 240.
uve, 81, 89.
Uve, 226.
UVE, 219.

$ValVbl_L$, 159.
Vbl, 87, 155, 232.
Vbl′ *o* Vbl_1, 156.
Vbl″ *o* Vbl_2, 156.
VLb, 93, 97. 235.
Vrd, 122, 123, 157, 166, 181, 186, 213, 215, 246, 249.
Vrd′, etc., 157.
Vrd_1, 120, 215, 240, 245.
Vrd_2, 121, 215, 245.
Vrd_3, 213, 215, 245.
Vrd_4, 246.
Vrd_5, 246.
$Vrd^n_{D_m}$, 277.

Indice de símbolos especiales

$\vee$	46.	$\frown$	81
$\sim$	46.	$+$	83.
x, x', etc.	46.	$\subset$	147. 153.
P, P′, etc.	46.	x^n_m	152.
$\bar{a}$, $\bar{a}'$, etc.	46.	$\langle x^1_1, x^1_2 \rangle$	154.
$\bar{f}$, $\bar{f}$, etc.	47.	PO	154.
A, B, etc.	47, 113.	*F, G,* etc.	170.
x, y, etc.	47, 113.	*R, Q,* etc.	170, 171.
$\supset$	49.	$\int$	185.
$\cdot$	49.	$(a + b)$	192, 193.
$\equiv$	49.	$(a \cdot b)$	192, 193.
(Ex)	49.	$-a$	192, 193.
$\vdash$	49.	S	230.
ε	61, 145, 151, 160, 278.	$(S_1 \ldots S_n)$	230.
$\exists$	61, 80, 108, 278.	X	230.
F, G, etc.	62, 83.	**A,** etc.	241.
$=$	62, 63, 64, 148, 151, 153, 228.	**x,** etc.	242.
$(\varepsilon x.Fx)$	65, 192.	**a**	250.
$(\iota x.Fx)$	67.	**Ay**	250.
E!	67, 180.	s_1, etc.	251.
$<$	76.	$`s_1 \ldots s_n'$	252.
o	76.	$\cdot s_1 \ldots s_n \cdot$	252.
σ	76.	$F^n_m F^q_k \exists X$	278.
a, b, etc.	80.	$\langle Ax_n, Vrd^n_D \rangle$	278, 279.

SEMILLA Y SURCO

COLECCION DE CIENCIAS SOCIALES

DIRIGIDA POR

M. JIMÉNEZ de PARGA *Catedrático de Derecho Político de la Universidad de Barcelona*

Y

FABIÁN ESTAPÉ *Catedrático de Política Económica de la Universidad de Barcelona*

VOLUMENES PUBLICADOS

Vol. 1.—SOCIOLOGIA, *R. M. Maclver* y *Charles H. Page*
» 2.—LAS NACIONES PROLETARIAS, *Pierre Moussa*
» 3.—INTRODUCCION A LA CIENCIA POLITICA, *Jean Meynaud*
» 4.—LA SEGUNDA REVOLUCION INDUSTRIAL, *H. Pasdermadjian*
» 5.—EL MARXISMO EN LA UNION SOVIETICA, *Henri Chambre*
» 6.—INTERCAMBIO INTERNACIONAL, *Michel Moret*
» 7.—LA DEMOCRACIA COMO FORMA POLITICA Y COMO FORMA DE VIDA, *C. J. Friedrich*
» 8.—COMERCIO INTERNACIONAL Y DESARROLLO ECONOMICO, *Jacob Viner*
» 9.—HISTORIA DE LAS IDEAS POLITICAS, *Jean Touchard*
» 10.—ANALISIS Y POLITICA ECONOMICA DE LOS PAISES SUBDESARROLLADOS, *P. T. Bauer*
» 11.—ECONOMIA AGRARIA, *Jean Valarché*
» 12.—PROBLEMAS MONETARIOS INTERNACIONALES Y NACIONALES, *Per Jacobsson*
» 13.—ANALISIS DE LOS SISTEMAS POLITICOS, *Douglas V. Verney*
» 14.—LECCIONES SOBRE PRINCIPIOS DE ECONOMIA, *Sir Dennis Robertson*
» 15.—LA ELABORACION DE LA POLITICA ECONOMICA, *Jean Meynaud*
» 16.—EL REGIMEN POLITICO DE LA GRAN BRETAÑA, *Sir Ivor Jennings*
» 17.—LA LUCHA CONTRA LOS MONOPOLIOS, *Ramón Tamames*
» 18.—ECOLOGIA HUMANA, *Amos H. Hawley.*
» 19.—LOS ESTADOS UNIDOS EN LA PALESTRA MUNDIAL, *W. W. Rostow*
» 20.—PROBLEMAS TEORICOS Y PRACTICOS DE LA PLANIFICACION, *Charles Bettelheim*
» 21.—ELECCIONES LIBRES, *W. J. M. Mackenzie*
» 22.—¿SE PUEDE CONTROLAR LA INFLACION? *Harold G. Moulton*
» 23.—DIMENSIONES DE LA CONCIENCIA HISTORICA, *Raymond Aron*
» 24.—FLUCTUACIONES ECONOMICAS E HISTORIA SOCIAL, *Ernest Labrousse*
» 25.—TRADICION Y MODERNISMO. *Enrique Tierno Galván.*
» 26.—LA CIENCIA DE LA ECONOMIA Y LAS DECISIONES ECONOMICAS, *S. S. Alexander y otros.*
» 27.—ACTITUDES CRISTIANAS HACIA LA GUERRA Y LA PAZ. *Roland Bamton.*

OBRAS EN PREPARACION (Consúltense las páginas finales).

"SEMILLA Y SURCO"

Colección de Ciencias Sociales

OBRAS EN PREPARACION:

M. Jiménez de Parga.—LAS MONARQUIAS PARLAMENTARIAS EN LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XX.

Hoffmann.—TEORIA CONTEMPORANEA DE LAS RELACIONES INTERNACIONALES.

Jacqueline B. de Celis.—LOS GRUPOS DE PRESION EN LAS DEMOCRACIAS CONTEMPORANEAS.

Rudolf Hilferding.—EL CAPITALISMO FINANCIERO.

A. N. Agarwala.—LA ECONOMIA DEL SUBDESARROLLO.

Kingsley Martin.—HAROLD LASKI, TEORICO DEL LABORISMO.

S. Neumann.—PARTIDOS POLITICOS MODERNOS.

Michel Fogarty.—HISTORIA E IDEOLOGIA DE LA DEMOCRACIA CRISTIANA.

R. M. MacIver.—TEORIA DEL GOBIERNO.

J. A. Schumpeter.—IMPERIALISMO Y CLASES SOCIALES.

Abram L. Harris.—ECONOMIA Y REFORMA SOCIAL.

Berger, Duverger y otros.—FEDERALISMO Y FEDERALISMO EUROPEO.

Strausz-Hupe y Hazard.—LA IDEA DEL COLONIALISMO.

William A. Robson.—INDUSTRIA NACIONALIZADA Y PROPIEDAD PUBLICA.

Finer.—TEORIA Y PRACTICA DEL GOBIERNO MODERNO.

André Philip.—LA DEMOGRACIA INDUSTRIAL.

Biscaretti di Ruffia.—DERECHO CONSTITUCIONAL.

Henri Chambre.—DE KARL MARX A MAO TSE-TUNG.

Dusenberry y Preston.—CASOS PARTICULARES DE ECONOMIA.

David E. Butler.—ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO POLITICO.

J. R. Hicks.—ENSAYOS SOBRE ECONOMIA MUNDIAL.

H. W. Ehrmanns.—GRUPOS DE INTERES EN CUATRO CONTINENTES.

Paul M. Sweezy.—EL PRESENTE COMO HISTORIA.

A. Doak Barnett.—LA CHINA COMUNISTA Y ASIA.

M. A. Fitzsimons y otros.—LA IMAGEN DEL HOMBRE.

Jürgen Fijalkowski.—LA MANIOBRA HACIA EL CAUDILLAJE.

Jan Tinbergen.—ENSAYOS SOBRE ECONOMIA.

Rene König.—SOCIOLOGIA EMPIRICA.

M. Mouskhely y Z. Jedrika.—EL GOBIERNO EN LA U. R. S. S.

Peter Heinz.—LOS PREJUICIOS SOCIALES.

Schattschneider.—REGIMEN DE PARTIDOS.

COLECCION

"VENTANA ABIERTA

MANUEL JIMÉNEZ DE PARGA:

LA V REPUBLICA FRANCESA (Una puerta abierta a la dictadura constitucional).—191 páginas, 21 × 12,5 cm.

MANUEL JIMÉNEZ DE PARGA:

FORMAS CONSTITUCIONALES Y FUERZAS POLITICAS.—304 páginas, 21 × 12,5 cm.

JEAN ROSTAND:

CIENCIA FALSA Y PSEUDO CIENCIAS.—225 páginas, 21 × 12,5 cm.

HENRY PELLING:

EL SINDICALISMO NORTEAMERICANO.—300 páginas, 21 × 12,5 cm.

WILLARD THORP:

LA LITERATURA NORTEAMERICANA EN EL SIGLO XX, 408 págs., 21 × 12,5 cm.

EN PREPARACION:

JUAN BENEYTO:

LA OPINION PUBLICA INTERNACIONAL.

MICHAEL YOUNG:

EL TRIUNFO DE LA MERITOCRACIA.

DANIEL BELL:

EL FIN DE LAS IDEOLOGIAS.

S. E. FINER:

EL IMPERIO ANONIMO.

FILOSOFIA

GURMÉNDEZ, Carlos:

SER PARA NO SER (Ensayo de una dialéctica subjetiva).—138 páginas, 22 × 14 cm.

NICOL, Eduardo:

PSICOLOGIA DE LAS SITUACIONES VITALES.—230 páginas, 22×14 cm.

NICOL, Eduardo:

HISTORICISMO Y EXISTENCIALISMO.—420 páginas, 22 × 14 cm.

NICOL, Eduardo:

EL PROBLEMA DE LA FILOSOFIA HISPANICA.—282 páginas, 22 × 14 centímetros.

SÁNCHEZ DE LA TORRE, ANGEL:

LOS GRIEGOS Y EL DERECHO NATURAL (Estudio de sociología jurídica).—344 págs., 22 × 14 cm.

COLECCION

"BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

DE

EDITORIAL TECNOS"

GASPAR BAYÓN CHACÓN:

LA AUTONOMIA DE LA VOLUNTAD EN EL DERECHO DEL TRABAJO *(Limitaciones a la voluntad contractual en el Derecho histórico español).*—320 páginas, 22 × 16 cm.

JUAN BENEYO:

TEORIA Y TECNICA DE LA OPINION PUBLICA.—217 páginas, 22 × 16 centímetros.

ALBERTO BERNÁRDEZ CANTÓN:

LAS CAUSAS CANONICAS DE SEPARACION CONYUGAL.—XII-722 páginas, 22 × 16 cm.

MANUEL DÍEZ DE VELASCO:

CURSO DE DERECHO INTERNACIONAL PUBLICO.—852 páginas 22 × 16 cm.

JUAN ECHEVARRÍA:

TEORIA DEL DINERO Y DEL COMERCIO INTERNACIONAL.

VENTURA GARCÉS BRUSSÉS:

REGIMEN JURIDICO DE LAS INVERSIONES EXTRANJERAS EN ESPAÑA.—362 páginas, 22 × 16 cm.

MANUEL JIMÉNEZ DE PARGA:

LOS REGIMENES POLITICOS CONTEMPORANEOS (Teoría general del régimen. Las grandes democracias con tradición democrática), 2.ª edición.—544 páginas, 22 × 16 cm.

EUGENIO PÉREZ BOTIJA:

DERECHO DEL TRABAJO.—6.ª edición. 630 págs, 25 × 17 cm.

ENRIQUE TIERNO GALVÁN:

INTRODUCCION A LA SOCIOLOGIA.—170 páginas, 22 × 16 cm.

DWIGHT WALDO:

TEORIA POLITICA DE LA ADMINISTRACION PUBLICA (El Estado administrativo).—338 páginas, 22 × 16 cm.

FÉLIX DEL VAL LATIERRO:

GRAFOCRITICA (El documento, la escritura y su proyección forense).—202 páginas, 22 × 14 cm.

LITERATURA Y FILOLOGIA

José Bergamín:

INQUISICIONES DE LITERATURA ESPAÑOLA. (En prensa.)

J. A. Pérez Rioja:

GRAMATICA DE LENGUA ESPAÑOLA (3.ª edición).—514 págs., 24 × 16 centímetros.

J. A. Pérez Rioja:

DICCIONARIO DE SIMBOLOS Y MITOS (Las Ciencias y las Artes en su expresión figurada).—368 págs., 25 × 17,5 cm.

Marina Romero:

PAISAJE Y LITERATURA DE ESPAÑA (Antología de los escritores del 98). Prólogo de Julián Marías. 376 págs., 60 fotos color, 7 negro, 25 × 20 centímetros.

ARTE Y ARQUEOLOGIA

M.ª E. Gómez Moreno:

BREVE HISTORIA DE LA ESCULTURA ESPAÑOLA.—245 págs., + 164 láminas, 25 × 17,5 cm.

Manuel Gómez Moreno:

ADAM Y LA PREHISTORIA.—176 págs. + XXIV láminas y grabados intercalados, 22 × 16 cm.

J. M.ª Gudiol; S. Alcolea; J. E. Cirlot:

HISTORIA DE LA PINTURA EN CATALUÑA.—332 págs, 144 láminas, 202 reproducciones en color y negro. Formato: 32,5 × 25,5 cm.

Enrique Lafuente Ferrari:

BREVE HISTORIA DE LA PINTURA ESPAÑOLA.—4.ª edición. 657 páginas + 257 láminas en color negro. 25 × 17,5 cm.

George L. Stout:

RESTAURACION Y CONSERVACION DE PINTURAS. (Prólogo de E. Lafuente Ferrari. Versión castellana de E. J. Núñez Peñasco).—83 páginas, 22 × 16 cm., 34 grabados de línea, 24 láminas en papel couché.

18 - XX